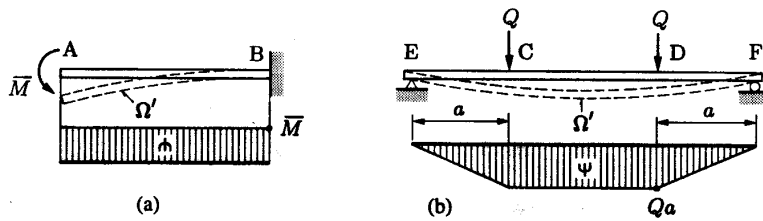


## *Flexion pure*

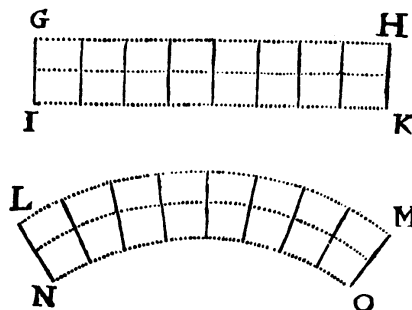
- définition : flexion pure ou circulaire
  - poutre soumise à  $M$  constant
  - $T = dM/dx \Rightarrow T = 0$  (!)



Flexion pure ( $M$  constant) et flexion simple ( $M$  variable).

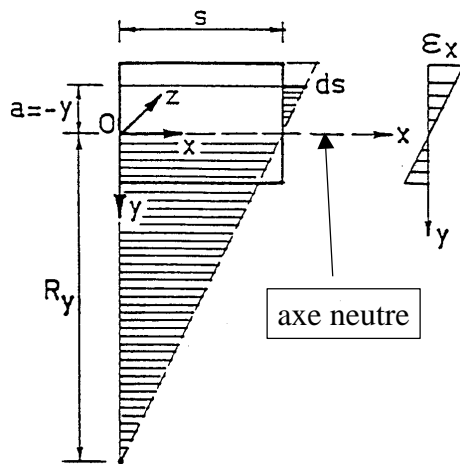
## *Hypothèse de Bernoulli*

- hypothèse cinématique
  - « les sections planes restent planes »



La poutre fléchie de R. Hooke (*De Potentia Restitutiva*, 1678).

## Bernoulli : mise en équations



$$\frac{ds}{-y} = \frac{s}{R_y}$$

$$\epsilon_x = \frac{ds}{s}$$

$$\epsilon_x = \frac{-y}{R_y}$$

$R_y$  est le rayon de courbure

## Méthode inverse

- supposons le matériau élastique linéaire  
( $\Rightarrow \sigma_x = E \epsilon_x$ )

- postulons

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{E y}{R_y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- équations d'équilibre de translation en volume

–  $\partial_j \tau_{ij} + f_i = 0$  satisfaites avec  $f_i = 0$

## Équilibre de translation en surface

- équations d'équilibre de translation en surface

$$N = \int_A \sigma_x dA = -\frac{E}{R_y} \int_A y dA = 0$$

or,  $\int_A y dA = y_G A$

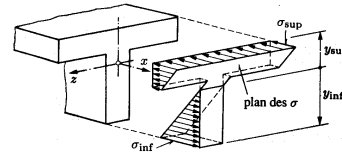


Diagramme des contraintes normales en flexion (section en T).

$N=0 \Rightarrow$  l'axe neutre passe par G !

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA = 0$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0$$

## Équilibre de rotation en surface

- équations d'équilibre de rotation en surface

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA = -\frac{E}{R_y} \int_A y^2 dA = -\frac{E}{R_y} I_z$$

$I_z$  = moment d'inertie (géométrique) autour de l'axe z ( $m^4$ )

$$M_y = \int_A -\sigma_x z dA = \frac{E}{R_y} \int_A y z dA = \frac{E}{R_y} I_{yz}$$

$I_{yz}$  = produit d'inertie

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0$$

## *Flexion plane*

- $M_y = 0$ 
  - flexion dans le plan Oxz uniquement
- $I_{yz} = 0$ 
  - axes principaux d'inertie

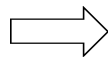
## *Calcul des contraintes*

- calcul du rayon de courbure

$$\frac{1}{R_y} = -\frac{M}{EI_z}$$

- calcul de la contrainte normale

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{R_y}$$



$$\sigma_x = \frac{My}{I_z}$$

(équation de Navier)

## *Sécurité des pièces fléchies*

- contraintes extrémales aux fibres extrémales

–  $\sigma_x = \frac{My_{\text{sup/inf}}}{I_z}$  (équation d'équarrissage)

- méthode des contraintes admissibles (déterministe)

–  $\sigma_{\text{sup/inf}} = \frac{My_{\text{sup/inf}}}{I_z} \leq \sigma_{\text{adm}}^{+/-}$

- méthode des états limites

– ELU  $\sigma_{\text{d sup/inf}} \leq \sigma_{\text{adm}}^{+/-}$  & ELS

- ATTENTION : fibres comprimées  $\Rightarrow$  déversement !!!

## *Dimensionnement*

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z / y_{\text{sup/inf}}}$$

$I_z / y_{\text{sup/inf}}$  est le module de résistance en flexion

$$\frac{1}{R_y} = - \frac{M}{EI_z}$$

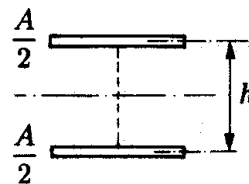
$EI_z$  est le module de rigidité en flexion

## *Forme rationnelle*

- $\sigma_x = \frac{My}{I_z}$  minimiser  $\sigma_x \Rightarrow$  maximiser  $I_z$
- or, maximiser  $I_z$   $I_z = \int_A y^2 dA \Rightarrow$  maximiser  $y$
- profil idéal

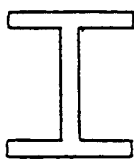
$$I_{th} = 2 \frac{A}{2} \left( \frac{h}{2} \right)^2$$

$$\left( \frac{I}{v} \right)_{th} = A \frac{h}{2}$$

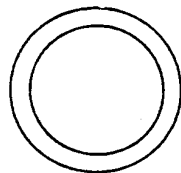


## *Rendement géométrique*

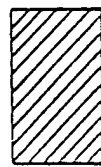
$$\eta_e = \frac{I/v}{(I/v)_{th}}$$



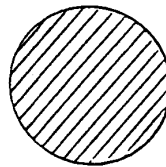
$\eta_e = 2/3$



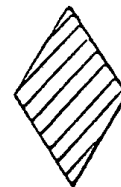
$\eta_e \approx 1/2$



$\eta_e = 1/3$



$\eta_e = 1/4$



$\eta_e = 1/6$

## *Remarques (1/3)*

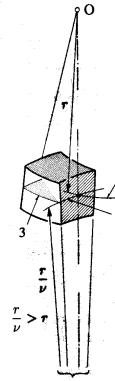
- limitations du profil en I
  - progrès du laminage
  - encombrement transversal des sections
  - largeur efficace
  - résistance au cisaillement
  - corrosion
- facilité de mise en œuvre du profil rectangulaire
  - matériaux peu onéreux (bois, béton)

## *Remarques (2/3)*

- position de l'axe neutre
  - sections dissymétriques
  - $\sigma_{adm}$  égaux en traction/compression  $\Rightarrow$  section symétrique
  - $\sigma_{adm}$  différents  $\Rightarrow$  calcul de la section optimale
- sections dissymétriques : attention à la flexion gauche
- axe fort - axe faible d'une poutre fléchie
- Bernoulli : valable même si non homogène transversal (BA, bois, fibres)

## Remarques (3/3)

déformation transversale :  
effet de Poisson



Déformation de la section droite due au coefficient de Poisson  
(1 : axe de la poutre ; 2 : axe neutre ; 3 : surface neutre).

## Moments d'inertie géométriques

- la théorie de la flexion fait apparaître des moments d'inertie **géométriques**

(analogie des moments d'inertie du mouvement du solide plan mais ne pas confondre)

$$I_{yy} = I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_{zz} = I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

- $I_{ij}$  est un tenseur d'ordre 2 (et en a les propriétés !)

## Moments d'inertie des figures planes

- moment d'inertie par rapport aux axes x et y

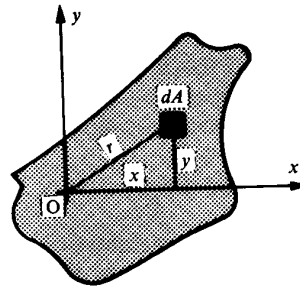
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (\text{toujours } > 0)$$

- produit d'inertie

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (\text{nul si axe de symétrie})$$

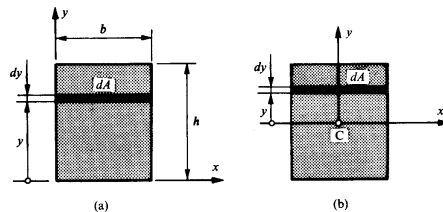
- moment d'inertie polaire

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad \Longrightarrow \quad I_p = I_x + I_y$$



## Moment d'inertie d'un rectangle

$$I_{x \text{ base}} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}$$

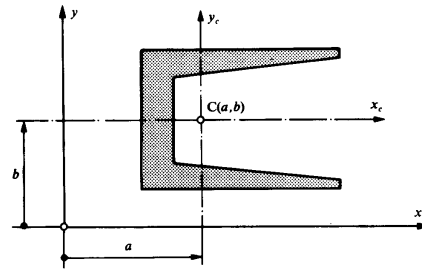


Calcul du moment d'inertie d'un rectangle.

$$I_{x \text{ central}} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

## Formule de Steiner

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_C} + b^2 A \\ I_y &= I_{y_C} + a^2 A \\ I_{xy} &= I_{x_C y_C} + abA \end{aligned}$$



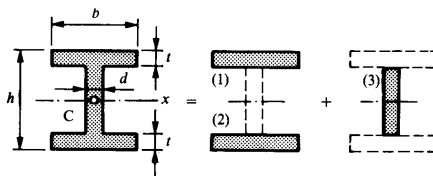
Théorème des axes parallèles.

$I_x$  et  $I_y$  sont donc minimaux au centre

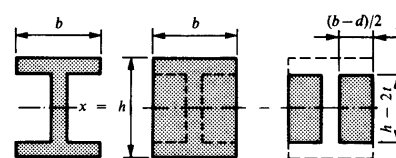
## Calcul par décomposition

- décomposition en somme algébrique

$$I_x = \sum (I_{x_{C_i}} + b_i^2 A_i)$$



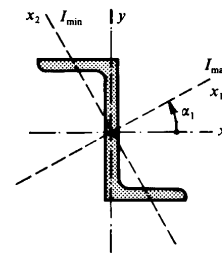
Section en I, somme de trois rectangles.



Autre décomposition de la section en I.

## *Axes principaux d'inertie*

- moments d'inertie  $I_x$  et  $I_y$  extrémaux
- produit d'inertie  $I_{xy}$  nul
  - si un axe (au moins) de symétrie
- détermination des axes principaux par loi de changement d'axes (cercle de Mohr)



Axes principaux centraux du profilé Z8.

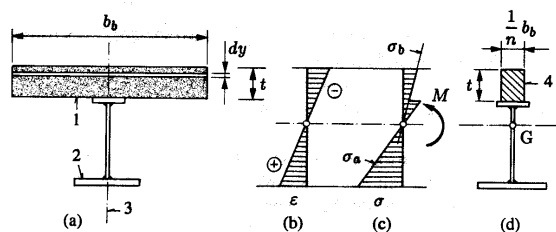
## *Poutres composées de 2 matériaux*

$$\tilde{b}_a = \frac{b_b}{n}$$

$$\frac{1}{R_y} = -\frac{M}{E_a \tilde{I}_a}$$

$$\sigma_a = \frac{My}{\tilde{I}_a}$$

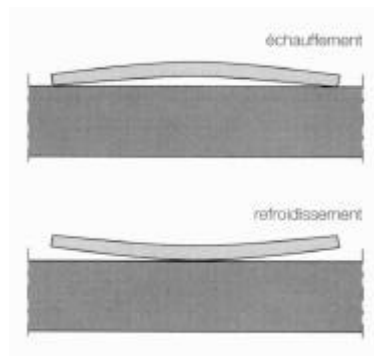
$$\sigma_b = \frac{\sigma_a}{n}$$



Flexion plane d'une poutre faite de deux matériaux (plan de flexion vertical) :  
 (a) section droite (1 : dalle de béton ; 2 : profilé en acier ; 3 : plan de flexion) ; (b) plan des dilatations (élévation) ;  
 (c) plans des contraintes (élévation) ; (d) section droite équivalente en flexion (4 : acier équivalent ;  
 G : centre géométrique de la section tout acier).

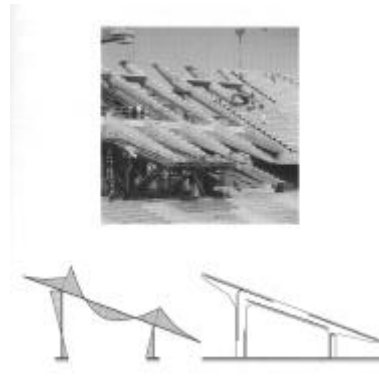
## *Effets thermiques*

- un gradient de température fait apparaître une déformation de flexion



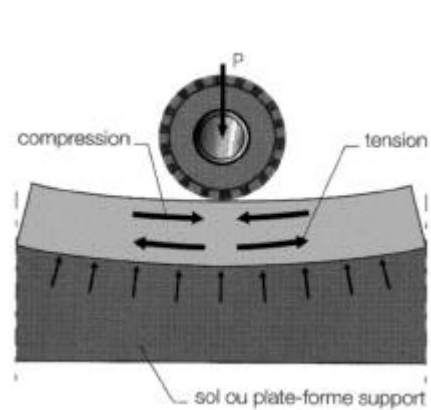
## *Illustrations des poutres fléchies*

- flexion des poutres de construction



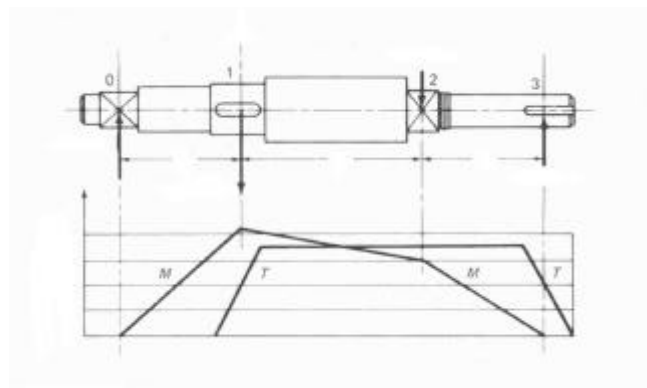
## *Illustrations des poutres fléchies*

- revêtements routiers sous poids des essieux



## *Illustrations des poutres fléchies*

- flexion d'un arbre mécanique



## *Illustrations des poutres fléchies*

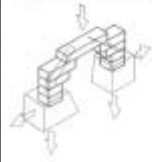
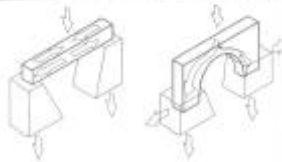
- augmenter  $I_z$

raisonnement intuitif



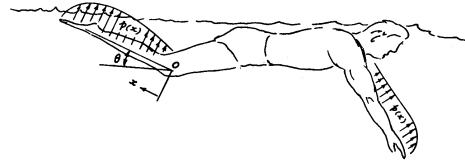
## *Illustrations des poutres fléchies*

- transmission des efforts de flexion

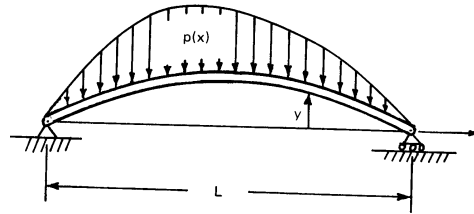


## *Illustrations des poutres fléchies*

- nageur



Forces acting on the arms and legs in swimming.



A simply-supported beam.