

Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen

(Unerwartete Strategien)

Man muss sich zwischen zwei Alternativen entscheiden und weiß fast nichts darüber, welche günstiger sein könnte. Dann kann man auch gleich eine Münze werfen, oder? Nein: Es geht besser.

Von F. Thomas Bruss

Sie wollen Ihr Haus verkaufen. Seit Wochen läuft Ihr Inserat in der Zeitung "Verkaufe für das beste Angebot über DM 800|||000". Stichtag ist der nächste Sonntag.

Zwei Käufer haben nun definitiv Interesse angemeldet. Herr X aus Paris versichert, dass er auf jeden Fall über DM 800|||000 bietet, aber am kommenden Samstag das Haus noch einmal sehen möchte, um sein endgültiges Angebot zu machen. Frau Y aus London sagt sinngemäß dasselbe, jedoch dass sie nur am kommenden Sonntag kommen könne. Beide machen klar, dass sie am Tag der letzten Besichtigung ein endgültiges Ja oder Nein von Ihnen benötigen.

Gern hätten Sie mehr herausgefunden. Wenn Sie doch nur eine Andeutung hätten heraushören können, was Herr X und Frau Y zu zahlen bereit sind! Am Telefon blieb es jedoch jeweils bei einem kurzen Lachen und der Bemerkung "Lassen Sie mich das Haus noch einmal sehen". Wahre Geschäftsleute, dieser X und diese Y, das haben Sie schon gemerkt. Auch haben Sie sich bereits erkundigt: Beide Interessenten sind seriös und zahlungsfähig. Aber wer von beiden nun letzten Endes interessierter sein könnte, ist nicht herauszufinden.

Sie überdenken die Situation in allen Details. Natürlich werden Sie Ihr Haus wieder anpreisen, aber das ändert nichts an dem Dilemma: Wenn Sie Herrn X zusagen, geht Ihnen das Angebot von Frau Y verloren und umgekehrt. Dies scheint ein Glücksspiel zu sein! Sie verpassen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ das bessere der beiden Angebote. Oder?

Eine andere Idee geht Ihnen durch den Kopf. Noch wissen ja Herr X und Frau Y nichts voneinander. Außerdem, London, Paris, völlig verschiedene Geschäftsbereiche - es ist unwahrscheinlich, dass sich die beiden kennen. Sollten Sie vielleicht den Preis hochtreiben, indem Sie jedem der beiden das Blaue vom Himmel über das Interesse des jeweils anderen erzählen? Herrn X vielleicht bei seinem Besuch? - Nein, wie Sie Herrn X einschätzen, wäre er kaum damit zu beindrucken, eher im Gegenteil. Frau Y vielleicht bei ihrem Besuch? Aber wenn sie kommt, ist Herr X bereits aus dem Rennen und taugt nicht mehr als Drohmittel.

Und wieder sind Sie bei der gleichen Schlussfolgerung angelangt. Wie die Umstände liegen, ist das Ganze ein reines Glücksspiel. Sie können genauso gut eine Münze werfen. Vielleicht sollten Sie einfach das Geschäft mit Herrn X abschließen, dann hätten Sie wenigstens den Sonntag frei.

Die Situation kommt in vielen Verkleidungen vor. Ein Sonderangebot im Supermarkt, eine günstige Wohnung oder

Arbeitsstelle, die Frau oder der Mann fürs Leben: Häufig kommt man in die Verlegenheit, zuzugreifen, ohne zu wissen, ob das, was nachkommt, nicht doch besser ist. Fassen wir das Szenario in ein abstraktes Spiel, damit es übersichtlicher ist.

Sie bitten Ihren Sohn und Ihre Tochter, jeweils im Verborgenen eine beliebige Zahl (wirklich ganz beliebig, groß oder klein, negativ, Dezimalkomma, alles ist erlaubt) auf einen Zettel zu schreiben und ihn verdeckt auf den Tisch zu legen. Sohn und Tochter sprechen sich nicht ab. Sie drehen den Zettel Ihres Sohns um und haben die Auswahl, die Zahl auf diesem Zettel zu wählen oder abzulehnen. Wenn Sie ablehnen, haben Sie damit automatisch die Zahl Ihrer Tochter gewählt. Dann werden beide Zahlen verglichen. Wenn Sie die größere von beiden gewählt haben, gewinnen Sie, sonst verlieren Sie. Der Unterschied der Zahlen ist nun belanglos, es geht nur ums Gewinnen. Bei Zahlengleichheit wird das Spiel wiederholt, aber dieser Fall ist sehr unwahrscheinlich. Um auszuschließen, dass Sie von der Persönlichkeit Ihrer Kinder auf die Zahlen schließen können, können Sie sich Ihre Kinder auch durch Fremde ersetzt denken. Es ist auch nicht verboten, dass eine Person beide Zettel ausfüllt.

Dies scheint nun wirklich ein reines Glücksspiel mit einer Gewinnchance von $1/2$ zu sein. Doch nun kommt die Überraschung: Hier ist eine Strategie, mit der Sie Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Sie geht im Ansatz auf Thomas Cover von der Universität Stanford (Kalifornien) zurück.

Seien X und Y die Zahlen auf den beiden Zetteln. Denken Sie sich eine (ganz beliebige) Zahl Z und wählen Sie die (zuerst aufgedeckte) Zahl X , wenn sie größer als Z ist, ansonsten wählen Sie Y .

Warum sollte dieses seltsame Verfahren besser sein, als auf gut Glück zu wählen? Hier ist der Beweis. Es gibt genau drei mögliche Ereignisse:

- (A) X und Y sind beide kleiner als oder höchstens gleich Z ,
- (B) Z liegt zwischen X und Y (einschließlich),
- (C) X und Y sind beide größer als Z .

Im Fall (A) wählen Sie Y , im Fall (C) wählen Sie entsprechend X . In diesen beiden Fällen gewinnen Sie mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, denn Ihre Entscheidung läuft im Endeffekt auf eine Zufallswahl hinaus. Aber im Fall (B) gewinnen Sie mit Sicherheit! Sie wählen nämlich automatisch die größere der beiden Zahlen, einerlei ob es X oder Y ist. Damit beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit insgesamt $w = (a+c)/2 + b$, wobei a , b und c die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse (A), (B) und (C) bezeichnen. Da aber eins der drei Ereignisse mit Sicherheit eintritt, gilt $a+b+c=1$. Somit haben wir $w = (a+b+c)/2 + b/2 = 1/2 + b/2$. Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit ist um $b/2$ höher als bei der schlichten Zufallswahl, und b ist größer als null: Ihr Z kann ja zwischen X und Y fallen.

Wie spielt man diese Strategie am geschicktesten? Offensichtlich so, dass Fall (B) eine möglichst hohe Wahrscheinlichkeit b hat. Also sollte man Z so wählen, dass es mit höchster Wahrscheinlichkeit zwischen X und Y liegt.

Diese beiden Zahlen kennt man aber gerade nicht. Im Allgemeinen gibt es also keine eindeutige Empfehlung für die Wahl von Z . Aber in konkreten Fällen findet man oft gute Anhaltspunkte.

Ein konkreter Fall ist der Hausverkauf. Auf dem ersten Zettel steht das Angebot von Herrn X , und den zweiten Zettel (das Angebot von Frau Y) kennen Sie nicht, wenn Sie Herrn X ja oder nein sagen müssen. Der einzige Unterschied zum Zettelspiel mit beliebigen Zahlen ist die Vorinformation, dass X und Y beide über $800\,000$ liegen. Ein Angebot von $900\,000$ und mehr ist wohl unwahrscheinlich, wenn auch nicht ganz auszuschließen. Umgekehrt: Wenn Sie Herrn X bei $801\,000$ zusagen und hinterher erfahren, dass Frau Y $802\,000$ geboten hätte, wird sich Ihr Ärger in Grenzen halten. Gegen eine verpasste Chance dieser Größe sich abzusichern bringt offensichtlich nicht viel. Damit sollten Sie Ihre "Schmerzgrenze" Z deutlich über $800\,000$, aber doch nicht zu groß wählen.

Ich persönlich würde würfeln und für jeden Augenpunkt DM 5000 auf DM $800\,500$ aufschlagen. Wenn der Würfel die Drei zeigt, würde ich also $Z=815\,500$ wählen. Aber ich behaupte nicht, dass dieser Vorschlag besser ist als der, an den Sie vielleicht denken.

Warum würfele ich überhaupt? Ich könnte mich ja auch gleich auf $Z=820\,000$ festlegen, wenn das mein Erwartungswert für die Gebote ist. Aber in spieltheoretischen Situationen ist es häufig ungünstig, berechenbar zu sein. Meine Strategie könnte sich herumsprechen, und meine Gegner könnten sich darauf einstellen. Deswegen die Einführung der Zufallskomponente auf meiner Seite.

Was ist die kleine Strategie wert? Mehr als eine Zufallswahl auf jeden Fall. Quantifizieren kann man den Vorteil nicht, aber $10\,000$ DM mehr dürften für Sie im Erwartungswert durchaus drin sein.

Vertauschen wir nun die Rollen. Nehmen Sie an, Sie sind derjenige, der (allein) verschiedene Zahlen auf zwei Zettel schreibt, und ich darf wie vorher eine der beiden Zahlen wählen. Nun ist es natürlich Ihr Interesse, meine Gewinnwahrscheinlichkeit möglichst klein zu halten. Was sollten Sie tun?

Die Antwort ist einfach. Sie wählen zwei Zahlen sehr nahe beieinander, zum Beispiel $6,123455$ und $6,123456$. Nun ist mein Vorteil nicht der Rede wert. Meine gewählte Zahl Z würde wohl kaum zwischen diese beiden Zahlen fallen.

Im täglichen Leben liegen die Dinge jedoch meist anders. Strategien werden auf einer Seite entwickelt und im Allgemeinen der Gegenseite nicht mitgeteilt. Welchen Unterschied macht dies? Um dies herauszufinden, habe ich vor einigen Jahren in einer Vorlesung für Business-Studenten des Vesalius College (Vrije Universiteit Brussel) einen Test gemacht. Jeder Zuhörer durfte zwei Zettel mit beliebigen

verschiedenen Zahlen ausfüllen, und so weiter. Von Z-Strategien wussten die Studenten nichts.

Bei 41 oder 42 Studenten konnte ich 32 Erfolge verbuchen! Bei einer Gut-Glück-Strategie wären 20 oder 21 zu erwarten, mit etwas Glück auch 3 oder 4 mehr. Jeder Statistiker würde jedoch bestätigen, dass man 32 nicht mit der Begründung Glück abtun sollte.

Selbst die besten Studenten standen vor einem Rätsel. Es ist schwer, etwas zu sehen, wo man nichts erwartet. Aber Sie, liebe Leser, können es erraten. Ich wandte eine Z-Strategie an, sogar eine besonders naive. Ich wählte $Z=0$.

Warum war diese einfache Strategie hier so erfolgreich? Weil ich das Aktionsfeld der Strategie anpassen konnte. Es war mir anscheinend gelungen, die Bemerkung "die Zahlen können auch negativ sein" locker genug einfließen zu lassen. Jedenfalls machten zahlreiche Studenten von negativen Zahlen Gebrauch. Alle diejenigen, die aber eine negative und eine positive Zahl aufgeschrieben hatten, machten mir automatisch den Erfolg zum Geschenk.

Dieses Beispiel widerlegt ein "Gesetz" des strategischen Denkens. Angeblich kommt es im Wettbewerb stets darauf an, den Gegner einzuengen. Dies ist in unserem Falle genau falsch. Wenn ich davon ausgehen kann, dass der Gegner meine Strategie nicht erwartet, kann es ungeschickt sein, ihn in seinen Möglichkeiten einzuschränken. Wer weniger tun kann, wird sich jeden Schritt genauer überlegen. Mit der Erlaubnis negativer Zahlen habe ich den Freiraum der Studenten nicht eingeengt, sondern erweitert. Dass sie damit auch besonders aufpassen mussten, hatten sie eben nicht erwartet.

Sie haben soeben eine mathematische Forschungsrichtung kennen gelernt, die im Vergleich zu vielen anderen hochentwickelten noch in den Kinderschuhen steckt: strategisches Denken, ein Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zahlreiche naheliegende Fragen sind noch unbeantwortet. Gibt es eine Strategie für das Zwei-Zettel-Spiel, die generell besser ist als die beschriebene Z-Strategie? Schon der Beweis der Existenz oder Nichtexistenz einer solchen Strategie wäre ein wahrer Fortschritt. Doch sehe ich nach heutigem Kenntnisstand keinen Ansatz für einen solchen Beweis, ja nicht einmal, wie man die Frage mathematisch hinreichend präzisieren könnte.

Ist es nicht erstaunlich, dass heute noch niemand Ihren Hausverkauf mit zwei Interessenten (beweisbar) optimieren kann? Eigentlich schon, wenn wir bedenken, was die Mathematik ansonsten geleistet hat. Verglichen mit Optimierungsproblemen. etwa im modernen Flugzeugbau, sieht unser kleines Problem lächerlich einfach aus. Das kann schon sein. Aber die Flugzeugoptimierer haben einen riesigen zeitlichen Vorsprung: Sie arbeiten routinemäßig mit Verfahren, deren mathematische Grundlagen schon vor zwei- bis dreihundert Jahren bekannt waren.

Kontraste dieser Art gibt es in den meisten Fachrichtungen der Mathematik. Ist dies ein Indiz für die ewige Jugend einer Disziplin? Ich glaube ja.

Literatur:

Bruss, F.T. "The fallacy of the two-envelopes problem." *The Mathematical Scientist*, (Herausgeber Applied Probability Trust), Vol. 21, S. 112-119. (1996)

Cover, T. "Pick the largest number" Problem 5.1 in *Open Problems in Communication and Computation*, (Herausgeber T. Cover und B. Gobinath.), S. 152. Springer Verlag, New York (1987)

Der Autor ist Professor für Mathematik (Lehrstuhl Mathématiques Générales) der französischsprachigen Freien Universität Brüssel (Université Libre de Bruxelles). Einer seiner Forschungsschwerpunkte ist die Entwicklung mathematischer Modelle für Strategien und ihre Anwendungen.

Dieser Artikel ist die überarbeitete Form eines Beitrags, der in den Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Heft 3/1998) erschienen ist.