La forme de Jordan d'un opérateur triangulable

Dans ce chapitre, K est un corps commutatif et V est un espace vectoriel sur K de dimension finie n.

1 Motivation, notions et rappels

Le but de ce chapitre est de fournir une solution au problème suivant.

Problème principal : Pour un opérateur linéaire $A \in \mathrm{End}(V)$, trouver une base B de V telle que la matrice $M_B(A)$ soit très simple.

La forme de Jordan fournit une solution satisfaisante au problème ci-dessus pour des opérateurs triangulables.

Pour $A \in \mathrm{End}(V)$ on a défini plusieurs invariants. Dans ce contexte, "invariant" signifie : on a les même notions pour des matrices carrées ; de plus, elles ne changent pas si on passe de l'opérateur A à $M_B(A)$ pour une base B de V. En particulier, elles ne dépendent pas du choix de la base B.

- Le rang de A : $\mathrm{rang}(A) := \dim \mathrm{Im}(A) \in \mathbf{N}$,
- le déterminant de A : $\det(A) \in K$,
- la trace de A : $\mathrm{Tr}(A) \in K$,
- le polynôme caractéristique de A : $P_A \in K[t]$,
- le spectre de A : $\mathrm{spec}(A) \subset K$,
- pour tout $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ la multiplicité géométrique $\mu_{geo}(\lambda) \in \mathbf{N}$ et la multiplicité algébrique $\mu_{alg}(\lambda) \in \mathbf{N}$.

Voici une proposition, montrée dans le chapitre précédent, et qui nous sera utile dans ce chapitre :

Proposition 1 *Soient $A \in \mathrm{End}(V)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ (non nécessairement distincts) tels que $P_A = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \ldots (\lambda_n - t)$. Alors il existe une base B de V telle que*

$$M_B(A) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En particulier l'opérateur A est triangulable.

Le théorème suivant résume les résultats principaux du chapitre précédent :

Théorème 2 *Soit $A \in \mathrm{End}(V)$. Alors*

- *A est triangulable si et seulement s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que $P_A = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \ldots (\lambda_n - t)$.*
- *A est diagonalisable si et seulement si A est triangulable et si on a $\mu_{geo}(\lambda) = \mu_{alg}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$.*

2 Sous-espaces A-invariants

Dans ce paragraphe A est un opérateur linéaire de V.

Définition 3 *Soit $U \leq V$. Le sous-espace U est appelé A-invariant, si $A(u) \in U$ pour tout $u \in U$. Si U est A-invariant on note $U \leq_A V$.*

Si $U \leq_A V$ alors la restriction de A à U est un opérateur linéaire de U noté $A|_U$. Donc $A|_U \in \operatorname{End}(U)$.

Proposition 4 *Soit $U \leq_A V$ de dimension k, B' une base de U et B un prolongement de B' à une base de V. Soit $\tilde{a} := M_{B'}(A|_U) \in M_k(K)$. Alors il existe une matrice $c_1 \in M_{n-k}(K)$ et une matrice $c_2 \in K^{k \times n-k}$ telles que*

$$M_B(A) = \begin{pmatrix} \tilde{a} & c_2 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $P_A = P_{\tilde{a}} P_{c_1} = P_{A|_U} P_{c_1}$.

Définition 5 *Soient U, W deux sous-espaces de V. On dit que V est la somme directe de U et W (et on note $V = U \oplus W$) si $V = U + W$ (c.à.d. V est engendré par U et W) et si $U \cap W = \{0_V\}$.*

Remarque 6 *Si $V = U \oplus W$, on a $n = \dim V = \dim U + \dim W$.*

Proposition 7 *Soit $V = U \oplus W$ avec $U \leq_A V$ et $W \leq_A V$ et soient $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ et $F = \{f_1, \ldots, f_{n-k}\}$ des bases de U et W respectivement. Soit $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ défini par $b_i := e_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et $b_i := f_{i-k}$ pour $k+1 \leq i \leq n$. Alors B est une base de V et on a*

$$M_B(A) = \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{c} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{a} = M_E(A|_U)$ et $\tilde{c} = M_F(A|_W)$. En particulier, $P_A = P_{A|_U} P_{A|_W}$.

Corollaire 8 *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ distincts 2 à 2 et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{N}$ tels que $P_A = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1}(\lambda_2 - t)^{\alpha_2} \ldots (\lambda_m - t)^{\alpha_m}$. Si $V = U \oplus W$ avec $U \leq_A V$ et $W \leq_A V$, alors il existe $\beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbf{N}$ tels que*
- *$P_{A|_U} = (\lambda_1 - t)^{\beta_1} \ldots (\lambda_m - t)^{\beta_m}$*
- *$P_{A|_W} = (\lambda_1 - t)^{\gamma_1} \ldots (\lambda_m - t)^{\gamma_m}$*
- *$\beta_i + \gamma_i = \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$.*

Les lemmes ci-dessus montrent que l'existence de sous-espaces A-invariants permet de trouver une base B telle que $M_B(A)$ a beaucoup d'entrées égales à 0. Le lemme suivant fournit un outil pour produire des sous-espaces A-invariants.

Lemme 9 *Soient $A, C \in \operatorname{End}(V)$ tels que $A \circ C = C \circ A$. Alors $\operatorname{Ker}(C) \leq_A V$ et $\operatorname{Im}(C) \leq_A V$.*

Donc, pour construire des sous-espaces A-invariants de V, il est utile de trouver des opérateurs C qui commutent avec A. Une façon de les obtenir est de prendre des valeurs de polynômes en A.

Définition 10 *Soient $f = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n$ un polynôme sur K et $A \in \operatorname{End}(V)$. Alors on définit $f(A) \in \operatorname{End}(V)$ par $f(A) := \lambda_0 \operatorname{Id}_V + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_n A^n$.*

Lemme 11 *Soit f un polynôme sur K, $A \in \operatorname{End}(V)$ et $C := f(A)$. Alors $C \circ A = A \circ C$, $\operatorname{Ker}(C) \leq_A V$ et $Im(C) \leq_A V$.*

3 Un théorème de décompositon

Lemme 12 *Soient $A \in \mathrm{End}(V)$, $0_V \neq v \in V$ et $k \in \mathbf{N}$ tel que $A^{k-1}(v) \neq 0_V = A^k(v)$. Alors on a les assertions suivantes :*
a) $\langle v, A(v), A^2(v), \ldots, A^{k-1}(v)\rangle \leq_A V$
b) Les vecteurs $v, A(v), A^2(v), \ldots, A^{k-1}(v)$ sont libres.
c) $k \leq n$

Démonstration. La partie a) est laissée comme exercice et la partie c) est une conséquence immédiate de la partie b). On démontre la partie b) par récurrence sur k. Si $k = 1$, l'assertion provient du fait qu'on suppose $v \neq 0_V$. Soit $k > 1$ et supposons que $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in K$ soient tels que $\Sigma_{i=0}^{k-1} \lambda_i A^i(v) = 0_V$.

Posons $w := A(v)$. On a $A^{k-2}(w) \neq 0_V = A^{k-1}(w)$ et donc – par l'hypothèse d'induction – les vecteurs $w = A(v), A(w) = A^2(v), \ldots, A^{k-2}(w) = A^{k-1}(v)$ sont libres.

On a aussi

$$0_V = A(0_V) = A(\Sigma_{i=0}^{k-1} \lambda_i A^i(v)) = \Sigma_{i=0}^{k-1} \lambda_i A^{i+1}(v) = \Sigma_{i=0}^{k-2} \lambda_i A^{i+1}(v)$$

puisque $A^k(v) = 0_V$. On en déduit $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-2} = 0_K$ car $A(v), A^2(v), \ldots, A^{k-1}(v)$ sont libres. Puisque $\Sigma_{i=0}^{k-1} \lambda_i A^i(v) = 0_V$ et $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-2} = 0_K$, on obtient $\lambda_{k-1} A^{k-1}(v) = 0_V$. Finalement $\lambda_{k-1} = 0_K$ car par hypothèse $A^{k-1}(v) \neq 0_V$, ce qui achève la démonstration.

Soit $A \in \mathrm{End}(V)$. On a $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = n$, $\mathrm{Ker}(A) \leq_A V$ et $\mathrm{Im}(A) \leq_A V$ (parce que A commute avec A). Donc on pourrait se demander si on a une décomposition directe $V = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$ en sous-espaces A-invariants. Ceci n'est pas toujours vrai. Par exemple pour l'opérateur $A \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$ défini par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

on a $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(A)$. Néanmoins, le théorème suivant montre qu'on a une telle décomposition si on remplace A par sa n-ème puissance (où n est la dimension de V).

Théorème 13 *Pour $A \in \mathrm{End}(V)$ on a : $V = \mathrm{Ker}(A^n) \oplus \mathrm{Im}(A^n)$.*

Démonstration. Puisque $\dim \mathrm{Ker}(A^n) + \dim \mathrm{Im}(A^n) = n$, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(A^n) \cap \mathrm{Im}(A^n) = \{0_V\}$. Soient $x \in \mathrm{Im}(A^n) \cap \mathrm{Ker}(A^n)$ et $y \in V$ tels que $x = A^n(y)$. Alors on a $A^{2n}(y) = A^n(A^n(y)) = A^n(x) = 0_V$ et donc $x = A^n(y) = 0_V$ car A^n est linéaire, ce qui achève la démonstration.

4 Un théorème de décomposition en sous-espaces invariants

Dans ce paragraphe, A est un opérateur triangulable de V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ sont distincts 2 à 2 et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{N}$ sont tels que $P_A = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1}(\lambda_2 - t)^{\alpha_2} \ldots (\lambda_m - t)^{\alpha_m}$. De plus, on pose $\lambda := \lambda_m$, $C := A - \lambda \, \mathrm{id}_V$, $U := \mathrm{Im}(C^n)$ et $W := \mathrm{Ker}(C^n)$.

Le lemme suivant est obtenu après un petit calcul :

Lemme 14 *$A \circ C = C \circ A$ et en particulier $A \circ C^n = C^n \circ A$.*

En utilisant le lemme ci-dessus, le théorème 13, le lemme 9 et le corollaire 8, on obtient le lemme suivant :

Lemme 15 *On a $V = U \oplus W$ et $U \leq_A V$ et $W \leq_A V$. De plus, il existe $\beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbf{N}$ tels que*
– $P_{A|_U} = (\lambda_1 - t)^{\beta_1} \ldots (\lambda_m - t)^{\beta_m}$

- $P_{A|_W} = (\lambda_1 - t)^{\gamma_1} \ldots (\lambda_m - t)^{\gamma_m}$
- $\beta_i + \gamma_i = \alpha_i$ *pour tout* $1 \leq i \leq m$.

Lemme 16 *Soit* $1 \leq i \leq m$ *tel que* $P_{A|_W}(\lambda_i) = 0$, *alors* $i = m$. *En particulier,* $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{m-1} = 0$.

Démonstration : Soit $1 \leq i \leq m$ tel que $P_{A|_W}(\lambda_i) = 0$. Alors $\lambda_i \in \mathrm{spec}(A\ |_W)$ et on trouve un $0_V \neq w \in W$ tel que $A(w) = \lambda_i w$. On a donc $C(w) = (A - \lambda\,\mathrm{id}_V)(w) = A(w) - \lambda w = \lambda_i w - \lambda w = (\lambda_i - \lambda)w$. On en déduit $C^n(w) = (\lambda_i - \lambda)^n w$. D'autre part on a $C^n(w) = 0_V$ car $w \in W = \mathrm{Ker}(C^n)$. Donc $(\lambda_i - \lambda)^n w = 0_V$ et puisque $w \neq 0_V$ on obtient $(\lambda_i - \lambda)^n = 0_K$ et finalement $\lambda_i = \lambda = \lambda_m$. Donc $i = m$ parce que les λ_i sont distincts 2 à 2. La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première.

Lemme 17 $V_\lambda \subset W$.

Démonstration : Soit $v \in V_\lambda$. Alors $A(v) = \lambda v$ et donc $0_V = A(v) - \lambda v = (A - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) = C(v)$. Cela fournit $C^n(v) = C^{n-1}(C(v)) = C^{n-1}(0_V) = 0_V$, qui signifie que $v \in \mathrm{Ker}(C^n) = W$. Donc $V_\lambda \subset W$.

Lemme 18 $P_{A|_U}(\lambda) \neq 0_K$. *En particulier,* $\beta_m = 0$.

Démonstration : Supposons $P_{A|_U}(\lambda) = 0_K$. Alors $\lambda \in \mathrm{spec}(A\ |_U)$ et on trouve un vecteur $0_V \neq u \in U$ tel que $A(u) = \lambda u$. Donc, on a $\{0_V\} \neq U \cap V_\lambda \subset U \cap W$ car $V_\lambda \subset W$ par le lemme précédent. Ceci contredit $V = U \oplus W$. Donc $P_{A|_U}(\lambda) \neq 0_K$ et la deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première.

Le théorème suivant est un résumé des lemmes ci-dessus :

Théorème 19 *Avec les hypothèses et conventions du début de ce paragraphe on a,* $V = U \oplus W$, $U \leq_A V$ *et* $W \leq_A V$. *Par ailleurs on a* $P_{A|_U} = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1}(\lambda_2 - t)^{\alpha_2} \ldots (\lambda_{m-1} - t)^{\alpha_{m-1}}$, $P_{A|_W} = (\lambda_m - t)^{\alpha_m}$ *et en particulier* $\alpha_m = \dim W = \dim \mathrm{Ker}(C^n)$.

5 Sous-espaces propres généralisés

On rappelle que pour $A \in \mathrm{End}(V)$ et $\lambda \in K$ on définit $V_\lambda \leq V$ par

$$V_\lambda := \{v \in V \mid A(v) = \lambda v\}.$$

Un petit calcul montre que

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}((A - \lambda\,\mathrm{Id}_V)).$$

Si $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$, on appelle V_λ le sous-espace propre associé à λ.

Définition 20 *Pour* $A \in \mathrm{End}(V)$ *et* $\lambda \in K$ *on pose*

$$W_\lambda := \mathrm{Ker}((A - \lambda\,\mathrm{Id}_v)^n).$$

Si $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$, *on appelle* W_λ *le sous-espace propre généralisé associé à* λ.

La première partie du lemme suivant est une reformulation du lemme 15 et la deuxième partie est le lemme 17.

Lemme 21 *Soit* $A \in \mathrm{End}(V)$ *triangulable et* $\lambda \in K$. *Alors* $W_\lambda \leq_A V$ *et* $V_\lambda \leq W_\lambda$.

Le théorème suivant est une conséquence du théorème 19.

Théorème 22 *Soit* $A \in \mathrm{End}(V)$ *un opérateur triangulable,* $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$, α *la multiplicité algébrique de* λ *et* $W := W_\lambda$. *Alors* $\dim W = \alpha$ *et* $P_{A|_W} = (\lambda - t)^\alpha$.

Remarque 23 *L'hypothèse "triangulable" n'est pas nécessaire dans les énoncés du lemme et du théorème ci-dessus. Les arguments dans les démonstrations des lemmes 15 et 17 données n'utilisent pas l'hypothèse "triangulable". Par contre, la démonstration du théorème sans cette hypothèse est un peu plus compliquée.*

6 Sommes et décompositions directes

Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces de V. On définit la somme des U_i par

$$\Sigma_{i=1}^m U_i := \{\Sigma_{i=1}^m u_i \mid u_i \in U_i \text{ pour } 1 \leq i \leq m\}.$$

Il est facile de vérifier que $\Sigma_{i=1}^m U_i$ est un sous-espace de V, qui est en fait le sous-espace engendré par les U_i.

Le lemme suivant est un exercice facile.

Lemme 24 *Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ et $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces A-invariants de V. Alors $\Sigma_{i=1}^m U_i$ est aussi un sous-espace A-invariant.*

Définition 25 *Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces de V. La somme $\Sigma_{i=1}^m U_i$ est appelée directe si $\dim(\Sigma_{i=1}^m U_i) = \Sigma_{i=1}^m \dim(U_i)$.*

Remarque 26 *La définition d'une somme directe donnée ci-dessus n'est valable que pour le cas où les dimensions des U_i sont toutes finies, ce qui est le cas dans notre contexte (parce que V est de dimension finie). Il y a une autre définition d'une somme directe pour le cas où les dimensions des U_i ne sont pas nécessairement finies, qui est équivalente à celle donnée ci-dessus dans le cas fini-dimensionel (voir Exercice 9).*

Exemples :
1. Soient $v_1, \ldots, v_m \in V$ des vecteurs non-nuls et U_i le sous-espace de dimension 1 engendré par v_i pour $1 \leq i \leq m$. Alors la somme $\Sigma_{i=1}^m U_i$ est directe si et seulement si les v_i forment une partie libre de V.
2. Soient $A \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathrm{spec}(A)$ distincts 2 à 2 et $U_i := V_{\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq m$. On a montré que la somme des U_i est directe en première année.

Le lemme suivant est un exercice facile.

Lemme 27 *Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces de V tels que la somme $\Sigma_{i=1}^m U_i$ est directe. Soit E_i est une base de U_i pour $1 \leq i \leq m$. Alors les E_i sont disjoints 2 à 2 et la réunion des E_i est une base de $\Sigma_{i=1}^m U_i$.*

Définition 28 *Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces de V. On dit que les sous-espaces U_i forment une décomposition directe de V si la somme des U_i est directe et si $V = \Sigma_{i=1}^m U_i$. On note $V = \oplus_{i=1}^m U_i$.*

Exemples :
1. Si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ est une base de V, alors $V = \oplus_{i=1}^n \langle b_i \rangle$.
2. Un opérateur linéaire $A \in \mathrm{End}(V)$ est diagonalisable si et seulement si $V = \oplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} V_\lambda$.

Proposition 29 *Soient $A \in \mathrm{End}(V)$ et $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces de V tels que $V = \oplus_{i=1}^m U_i$ et $U_i \leq_A V$ pour $1 \leq i \leq m$. Soit E_i une base de U_i pour $1 \leq i \leq m$ et B la réunion des E_i. Alors B est une base de V et*

$$M_B(A) := \begin{pmatrix} M_{E_1}(A\,|_{U_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{E_2}(A\,|_{U_2}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{E_m}(A\,|_{U_m}) \end{pmatrix}.$$

7 Décomposition comme somme directe de sous-espaces propres généralisés

Pour démontrer le résultat principal de ce paragraphe, nous devons établir quelques faits sur les polynômes. Commençons par une définition.

Définition 30 *Soient $f, g \in K[t]$ des polynômes. On dit que g divise f s'il existe un polynôme h tel que $f = gh$. On note $g \mid f$.*

Lemme 31 *Soit $f \in K[t]$.*
a) Si $g \in K[t]$ est tel que $g \mid f$ et $f \mid g$, alors il existe $0_K \neq \eta \in K$ tel que $g = \eta f$; en particulier, f et g ont le même degré.
b) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ sont distincts 2 à 2, si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des nombres naturels et si $(\lambda_i - t)^{\alpha_i}$ divise f pour tout $1 \leq i \leq m$, alors $(\lambda_1 - t)^{\alpha_1}(\lambda_2 - t)^{\alpha_2} \dots (\lambda_m - t)^{\alpha_m}$ divise f.

Le lemme suivant est une conséquence de la dernière partie de l'énoncé de la proposition 4.

Lemme 32 *Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ et $U \leq_A V$. Alors $P_{A|_U}$ divise P_A.*

Théorème 33 *Soient $A \in \mathrm{End}(V)$ un opérateur triangulable et $P_A = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1} \dots (\lambda_m - t)^{\alpha_m}$ son polynôme caractéristique, où $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ sont distincts 2 à 2 et les α_i sont des entiers strictement positifs. Pour $1 \leq i \leq m$, posons $W_i := W_{\lambda_i}$. Alors on a les assertions suivantes :*
a) Pour $1 \leq i \leq m$, on a $W_i \leq_A V$.
b) Pour $1 \leq i \leq m$, $P_{A|W_i} = (\lambda_i - t)^{\alpha_i}$.
c) V est la somme directe des W_i.

Démonstration. Puisque l'opérateur A est triangulable, les parties a) et b) sont des conséquences du théorème 22. Donc il reste à montrer la partie c).

On pose $\tilde{V} := \Sigma_{i=1}^m W_i$. Puisque les W_i sont tous A-invariants, le sous-espace $\tilde{V}$ l'est aussi par le lemme 24. Posons $\tilde{A} := A\mid_{\tilde{V}} \in \mathrm{End}(\tilde{V})$. Par le lemme 32, on sait que $P_{\tilde{A}}$ divise P_A.

Soit $1 \leq i \leq m$. On a $W_i \leq \tilde{V}$ et $A(w) = \tilde{A}(w)$ pour tout $w \in W_i$ car $\tilde{A}$ est la restriction de A à $\tilde{V}$. Cela montre que W_i est un sous-espace $\tilde{A}$-invariant et que $A\mid_{W_i} = \tilde{A}\mid_{W_i}$ dans $\mathrm{End}(W_i)$. Donc $P_{\tilde{A}|_{W_i}} = P_{A|_{W_i}} = (\lambda_i - t)^{\alpha_i}$ par la partie b). Par le lemme 32, on a que $(\lambda_i - t)^{\alpha_i}$ divise $P_{\tilde{A}}$.

On vient de montrer que $(\lambda_i - t)^{\alpha_i}$ divise $P_{\tilde{A}}$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Par la deuxième partie du lemme 31, on en déduit que $P_A = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1} \dots (\lambda_m - t)^{\alpha_m}$ divise $P_{\tilde{A}}$. On a déjà remarqué ci-dessus que $P_{\tilde{A}}$ divise P_A. En utilisant la première partie du lemme 31, on voit que les degrés de ces deux polynômes sont les mêmes. Donc $n = \dim V = \deg(P_A) = \deg(P_{\tilde{A}}) = \dim \tilde{V}$ et finalement, $V = \tilde{V} = \Sigma_{i=1}^m W_i$. Puisque $\dim W_i = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $\Sigma_{i=1}^m \alpha_i = n = \dim V$, on a aussi $\dim(\Sigma_{i=1}^m W_i) = \dim V = n = \Sigma_{i=1}^m \alpha_i = \Sigma_{i=1}^m \dim W_i$, c.à.d. la somme $\Sigma_{i=1}^m W_i$ est directe. On a donc montré que les W_i forment une décomposition directe de V.

8 Réduction au cas nilpotent

Le paragraphe précédent réduit le problème principal pour les opérateurs triangulables au cas où le polynôme caractéristique de l'opérateur en question est de la forme $(\lambda - t)^\alpha$, pour un $\lambda \in K$ et un entier positif α. Dans ce paragraphe, on va voir qu'en fait on peut se ramener au cas où l'opérateur est nilpotent.

On commence avec deux résultats, qui nous seront utiles par la suite. Leurs démonstrations sont laissées comme exercices non triviaux.

Lemme 34 *Soit $a \in M_n(K)$ une matrice triangulaire dont toutes les entrées sur la diagonale sont nulles. Alors $a^n = 0_{M_n(K)}$.*

Proposition 35 *Soit $A \in \mathrm{End}(V)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe un $k \in \mathbf{N}$ tel que $A^k = 0_{\mathrm{End}(V)}$.
b) $A^n = 0_{\mathrm{End}(V)}$.
c) $P_A = (-t)^n$.
d) Il existe une base B de V telle que $M_B(A)$ est une matrice triangulaire dont toutes les entrées sur la diagonale sont nulles.

Définition 36 *Un opérateur linéaire $A \in \mathrm{End}(V)$ est appelé nilpotent s'il satisfait aux conditions équivalentes de la proposition ci-dessus.*

Lemme 37 *Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ tel que $P_A = (\lambda - t)^n$ pour un $\lambda \in K$. Alors $C := A - \lambda \mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}(V)$ est un opérateur nilpotent.*

Démonstration. Par la proposition 1, il existe une base B de V telle que $a := M_B(A)$ soit une matrice triangulaire dont les entrées sur la diagonale sont toutes égales à λ. Donc $M_B(C) = M_B(A - \lambda \mathrm{Id}_V) = a - \lambda u_n$ est une matrice triangulaire dont toutes les entrées sur la diagonales sont égales à 0. Par le lemme 34, on a $(a - \lambda u_n)^n = 0_{M_n(K)}$. Donc $C^n = 0_{\mathrm{End}(V)}$ et le lemme est démontré.

Remarque 38 *Soit A un opérateur comme dans le lemme ci-dessus. Si on a une solution au problème principal pour les opérateurs nilpotents, on choisit alors une base B telle que $M_B(C)$ soit "très simple" (où C est comme dans le lemme). Avec ce choix, $M_B(A) = M_B(C + \lambda \mathrm{Id}_V) = M_B(C) + \lambda u_n$ sera aussi "très simple".*

9 Opérateurs nilpotents

Définition 39 *Soit A un opérateur nilpotent de V.*
- *L'exposant de A est défini comme étant le plus petit entier positif k tel que $A^{k-1} \neq 0_{\mathrm{End}(V)} = A^k$. Il est noté $\exp(A)$.*
- *Soit $0_V \neq v \in V$. L'exposant de v par rapport à A est le plus petit entier positif k tel que $A^{k-1}(v) \neq 0_V = A^k(v)$. Il est noté $\exp_A(v)$.*
- *Pour $0_V \neq v \in V$ on pose $B_v := \{v, A(v), A^2(v), \ldots, A^{k-1}(v)\}$ et $\langle v \rangle_A := \langle v, A(v), A^2(v), \ldots, A^{k-1}(v) \rangle$ avec $k := \exp_A(v)$.*

Remarque 40 *Si A est un opérateur nilpotent il existe un $0_V \neq v \in V$ tel que $\exp_A(v) = \exp(A)$.*

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des parties a) et b) du lemme 12.

Lemme 41 *Soit A un opérateur nilpotent de V et $0_V \neq v \in V$. Alors $\langle v \rangle_A \leq_A V$ et B_v est une base de $\langle v \rangle_A$.*

Le pas le plus technique dans la démonstration de l'existence de la forme de Jordan pour des opérateurs triangulables est la démonstration de la proposition suivante. On va la postposer à la fin de ce paragraphe.

Proposition 42 *Soit A un opérateur nilpotent de V, soit k son exposant et soit $0_V \neq v \in V$ tel que $\exp_A(v) = k$. Alors il existe $W \leq_A V$ tel que $V = \langle v \rangle_A \oplus W$.*

Théorème 43 *Soit A un opérateur nilpotent de V. Alors il existe des vecteurs $0_V \neq v_1, v_2, \ldots, v_l \in V$ tels que $V = \langle v_1 \rangle_A \oplus \langle v_2 \rangle_A \oplus \ldots \oplus \langle v_l \rangle_A$.*

Démonstration. Le théorème sera démontré par récurrence sur la dimension n.

Si $n = 1$, on a $A = 0_{\mathrm{End}(V)}$. Dans ce cas $l = 1$ et on peut choisir un vecteur non nul pour v_1.

Soient $n > 1$ et $0_V \neq v$ un vecteur tel que $\exp_A(v) = \exp(A)$. Si $\langle v \rangle_A = V$, on pose $l := 1$ et $v_1 := v$. Donc il reste à considérer le cas où $\langle v \rangle_A \neq V$. Par la proposition ci-dessus, il existe $W \leq_A V$ tel que $V = \langle v \rangle_A \oplus W$. Posons $\tilde{A} := A\mid_W$. Puisque A est nilpotent, l'opérateur $\tilde{A}$ est nilpotent et on a aussi $\dim W < \dim V$. Par l'hypothèse d'induction, il existe donc des vecteurs $w_1, \ldots, w_{\tilde{l}}$ tels que $W = \langle w_1 \rangle_A \oplus \ldots \oplus \langle w_{\tilde{l}} \rangle_A$. On pose $l = \tilde{l} + 1$, $v_i := w_i$ pour $1 \leq i \leq l - 1$ et $v_l := v$, ce qui achève la démonstration.

Démonstration de la proposition

La démonstration de la proposition est basée sur le lemme suivant :

Lemme 44 *Soit A un opérateur nilpotent de V, soit k son exposant et soit $0_V \neq v \in V$ tel que $\exp_A(v) = k$. Soit $W \leq_A V$ tel que $\langle v\rangle_A \cap W = \{0_V\}$ et tel que $\dim W < n - k$. Alors il existe un vecteur $0_V \neq z \in V \setminus W$ tel que $\langle W, z\rangle \leq_A V$ et $\langle v\rangle_A \cap \langle W, z\rangle = \{0_V\}$.*

Démonstration. Soit $U := \langle v\rangle_A$. Puisque $\dim W < n - k$ on a $\dim(U + W) < n$ et donc on peut choisir un vecteur $x \in V$ qui n'est pas contenu dans $U + W$. On a $A^k(x) = 0_V \in U + W$. Soit l le plus petit entier positif tel que $A^l(x)$ soit contenu dans $U + W$ et soit $y := A^{l-1}(x)$. Donc $y \notin U + W$ et $A(y) \in U + W$.

Puisque $\{v, A(v), \ldots A^{k-1}(v)\}$ est une base de U et $U \cap W = \{0_V\}$ on peut écrire $A(y)$ de manière unique $A(y) = \lambda_0 v + \lambda_1 A(v) + \ldots + \lambda_{k-1}A^{k-1}(v) + w$ où les λ_i sont dans K et w est un vecteur dans W.

On a $0_V = A^k(y) = A^{k-1}(A(y)) = A^{k-1}(\lambda_0 v + \lambda_1 A(v) + \ldots + \lambda_{k-1}A^{k-1}(v) + w) = \lambda_0 A^{k-1}(v) + A^k(\lambda_1 v + \ldots \lambda_{k-1}A^{k-2}(v)) + A^{k-1}(w)$ et donc $0_V = \lambda_0 A^{k-1}(v) + A^{k-1}(w)$ car $A^k = 0_{\mathrm{End}(V)}$. On en déduit que $\lambda_0 A^{k-1}(v) = -A^{k-1}(w) \in W$ parce que $W \leq_A V$. On obtient donc $\lambda_0 A^{k-1}(v) \in U \cap W = \{0_V\}$ ce qui fournit $\lambda_0 A^{k-1}(v) = 0_V$ et finalement $\lambda_0 = 0_K$ parce que $A^{k-1}(v) \neq 0_V$.

Puisque $\lambda_0 = 0_K$ on a $A(y) = \lambda_1 A(v) + \ldots + \lambda_{k-1}A^{k-1}(v) + w$. Posons $z := y - (\lambda_1 v + \lambda_2 A(v) + \ldots + \lambda_{k-1}A^{k-2}(v))$. Alors on a $z \notin U + W$ (car $y \notin U + W$) et on a $A(z) = w \in W$. Donc $\langle z, W\rangle \leq_A V$ et il nous reste a montrer $\langle z, W\rangle \cap U = \{0_V\}$.

Soit $u \in \langle z, W\rangle \cap U$. Soient $\lambda \in K$ et $w \in W$ tel que $u = \lambda z + w$. On a $\lambda z = u - w \in U + W$. Puisque $z \notin U + W$ on a $\lambda = 0_K$ et donc $u = w \in U \cap W = \{0_V\}$. Le lemme est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la propositon : Soit $U := \langle v\rangle_A$ et posons $W_0 =: \{0_V\}$. $W_0 \leq_A V$. En utilisant le lemme on construit par récurrence une suite de sous-espaces A-invariants $W_0 < W_1 < \ldots < W_{n-k}$ telle que $\dim W_i = i$ et $W_i \cap U = \{0_V\}$. En posant $W := W_{n-k}$ on obtient le résultat.

10 La forme de Jordan d'un opérateur nilpotent

Définition 45 *Pour un entier positif k, on définit la matrice $J_k \in M_k(K)$ par $J_k := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où les $a_{ij} \in K$ sont définis comme suit. On pose $a_{ij} = 0_K$ si $j \neq i - 1$ et on pose $a_{ij} = 1_K$ si $j = i - 1$. Donc on a*

$$J_k := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La définition des matrices J_k est motivée par le lemme suivant dont la première partie est le lemme 41. La deuxième partie est un exercice facile.

Lemme 46 *Soit A un opérateur nilpotent de V, $0_V \neq v \in V$ $U := \langle v\rangle_A$, et $k := \exp_A(v)$. Alors $U \leq_A V$, B_v est une base de U et $M_{B_v}(A\,|_U) = J_k$.*

Théorème 47 *Soit A un opérateur nilpotent de V et $l := \dim \mathrm{Ker}(A)$. Alors il existe des entiers positifs $k_1, \ldots, k_l$ et une base B de V tels que*

$$M_B(A) := \begin{pmatrix} J_{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_l} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Par le théorème 43, on trouve des vecteurs $0_V \neq v_1, \dots, v_l \in V$ tels que V est la somme directe des $\langle v_i \rangle_A$. Pour tout $1 \leq i \leq l$, on prend la base B_{v_i} décrite dans le lemme ci-dessus et on définit B comme étant la réunion des B_{v_i}. La matrice $M_B(A)$ est de la forme décrite dans l'énoncé du théorème. En regardant le rang de cette matrice, on vérifie a posteriori que le nombre l coïncide avec la dimension du $\mathrm{Ker}(A)$.

11 Existence de la forme de Jordan

Définition 48 *Pour $\lambda \in K$ et un entier positif k on définit la matrice $\mathrm{Jor}_k(\lambda) \in M_k(K)$ par $\mathrm{Jor}_k(\lambda) := J_k + \lambda u_k$. Donc on a*

$$\mathrm{Jor}_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{Jor}_k(\lambda)$ est appelé le bloc de Jordan de taille k associé à λ.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème sur la forme de Jordan pour les opérateurs nilpotents et des considérations du paragraphe 8.

Proposition 49 *Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ tel que $P_A = (\lambda - t)^n$ pour un $\lambda \in K$. Soit $l := \dim V_\lambda$ la multiplicité géométrique de λ et $C := A - \lambda \mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}(V)$. Alors il existe des entiers positifs $k_1, \dots, k_l$ et une base B de V tels que*

$$M_B(A) := \begin{pmatrix} \mathrm{Jor}_{k_1}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{Jor}_{k_2}(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Jor}_{k_l}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

En utilisant le théorème 33 et la proposition précédente, on obtient finalement le théorème d'existence de la forme de Jordan.

Théorème 50 *Soient A un opérateur triangulable de V et $P_A = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1} \dots (\lambda_m - t)^{\alpha_m}$ où les $\lambda_i \in K$ sont distincts 2 à 2 et les α_i sont des entiers strictement positifs. Alors il existe une base B de V telle que*

$$M_B(A) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

où, pour tout $1 \leq i \leq m$, a_i est une matrice $\alpha_i \times \alpha_i$ comme dans la proposition ci-dessus (avec $\lambda = \lambda_i$, $n = \alpha_i$ et $l = dimV_{\lambda_i}$).

12 Multiplicités généralisées

Commençons par deux observations.

Lemme 51 *Soient l et $n_1, \ldots, n_l$ des entiers strictement positifs et $a_j \in M_{n_j}(K)$ pour $1 \leq j \leq l$. Soit $n := \Sigma_{j=1}^{l} n_j$ et $a \in M_n(K)$ définie par*

$$a := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_l \end{pmatrix}.$$

Alors on a les deux assertions suivantes.
a) $\operatorname{rang}(a) = \Sigma_{j=1}^{l} \operatorname{rang}(a_j)$ *et* $\dim(\operatorname{Ker}(a)) = \Sigma_{j=1}^{l} \dim(\operatorname{Ker}(a_j))$.
b) Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a

$$a^m := \begin{pmatrix} a_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_l^m \end{pmatrix}.$$

c) Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $\operatorname{rang}(a^m) = \Sigma_{j=1}^{l} \operatorname{rang}(a_j^m)$

Démonstration : Les parties a) et b) sont des exercices faciles et la partie c) est une conséquence de celles-ci.

La démonstration du lemme suivant est laissée comme exercice.

Lemme 52 *Soient k, m des entiers positifs. Alors on a les assertions suivantes :*
a) Si $m \geq k$, on a $J_k^m = 0_{M_k(K)}$ et en particulier $\operatorname{rang} J_k^m = 0$.
b) Si $m \leq k$, on a $\operatorname{rang} J_k^m = k - m$.
c) Soit $\epsilon := \operatorname{rang} J_k^{m-1} - 2 \operatorname{rang} J_k^m + \operatorname{rang} J_k^{m+1}$, alors on a $\epsilon = 1$ si $k = m$ et $\epsilon = 0$ si $k \neq m$.

En utilisant le lemme ci-dessus on démontre la proposition suivante.

Proposition 53 *Soient k, m des entiers positifs et $\lambda, \eta \in K$. Posons $\tilde{a} := \operatorname{Jor}_k(\lambda) - \eta u_k \in M_k(K)$. Alors on a les assertions suivantes :*
a) Si $\lambda \neq \eta$ alors $\operatorname{rang} \tilde{a}^i = k$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ et en particulier

$$\operatorname{rang} \tilde{a}^{m-1} - 2 \operatorname{rang} \tilde{a}^m + \operatorname{rang} \tilde{a}^{m+1} = 0.$$

b) Si $\lambda = \eta$ alors

$$\operatorname{rang} \tilde{a}^{m-1} - 2 \operatorname{rang} \tilde{a}^m + \operatorname{rang} \tilde{a}^{m+1} = \epsilon,$$

où $\epsilon = 1$ si $k = m$ et $\epsilon = 0$ si $k \neq m$.

La proposition ci-dessus est très importante parce qu'elle nous permet de compter les blocs de Jordan de taille k associés à une valeur propre. Afin de préciser ceci, voici la définition des multiplicités généralisées pour des matrices.

Définition 54 *Soient $1 \leq m \in \mathbf{N}$ et $\eta \in K$. Pour une matrice $a \in M_n(K)$ on définit la multiplicité généralisée du couple (η, m) par*

$$\mu_{(\eta,m)}(a) := \operatorname{rang} \tilde{a}^{m-1} - 2 \operatorname{rang} \tilde{a}^m + \operatorname{rang} \tilde{a}^{m+1},$$

où $\tilde{a} := a - \eta u_n \in M_n(K)$.

Le lemme suivant est une conséquence de la partie c) du lemme 51.

Lemme 55 *Soient l et $n_1, \dots, n_l$ des entiers strictement positifs et soit $a_j \in M_{n_j}(K)$ pour $1 \leq j \leq l$. Soit $n := \Sigma_{j=1}^{l} n_j$ et $a \in M_n(K)$ définie par*

$$a := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_l \end{pmatrix}.$$

Soit m un entier strictement positif et $\eta \in K$. Alors

$$\mu_{(\eta,m)}(a) = \Sigma_{j=1}^{l} \mu_{(\eta,m)}(a_j).$$

La proposition suivante est une reformulation de la proposition 53.

Proposition 56 *Soient k, m des entiers positifs et $\lambda, \eta \in K$. Alors*

$$\mu_{(\eta,m)}(\mathrm{Jor}_k(\lambda)) = \delta_{(\eta,m),(\lambda,k)}.$$

Définition 57 *Une matrice $a \in M_n(k)$ est appelée une matrice de Jordan s'il existe $1 \leq l \in \mathbf{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in K$ (non nécéssairement distincts) et des entiers $n_1, \dots, n_l$ strictement positifs tels que*

$$a := \begin{pmatrix} \mathrm{Jor}_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{Jor}_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Jor}_{n_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}.$$

Soit a une matrice de Jordan comme ci-dessus, $\lambda \in K$ et $1 \leq k \in \mathbf{N}$. Le nombre $|\{1 \leq j \leq l \mid (\lambda_j, n_j) = (\lambda, k)\}|$ est appelé la multiplicité du bloc de Jordan $\mathrm{Jor}_k(\lambda)$ dans la matrice a.

Théorème 58 *Soit $a \in M_n(K)$ une matrice de Jordan, $\lambda \in K$ et $1 \leq k \in \mathbf{N}$. Alors la multiplicité du bloc de Jordan $\mathrm{Jor}_k(\lambda)$ dans a est la multiplicité généralisée $\mu_{(\lambda,k)}(a)$.*

Soit $\lambda \in \mathrm{spec}(a)$. Alors on a les deux assertions suivantes :

a) $\mu_{geo}(\lambda) = \Sigma_{i=1}^{n} \mu_{(\lambda,i)}(a)$; c.à.d la multiplicité géométrique est le nombre de blocs de Jordan dans a qui sont associés à λ.

b) $\mu_{alg}(\lambda) = \Sigma_{i=1}^{n} i \mu_{(\lambda,i)}(a)$.

Démonstration : La première partie du théorème est une conséquence du lemme 55 et de la proposition 53. Les deux assertions de la deuxième partie sont des exercices faciles.

13 Le résultat principal

Définition 59 *Soit m un entier positif et $\eta \in K$. Pour un opérateur linéaire $A \in \mathrm{End}(V)$ on définit la multiplicité généralisée du couple (η, m) par*

$$\mu_{(\eta,m)}(A) := \mathrm{rang}\, \tilde{A}^{m-1} - 2\,\mathrm{rang}\, \tilde{A}^{m} + \mathrm{rang}\, \tilde{A}^{m+1},$$

où $\tilde{A} := A - \eta\, \mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}(V)$.

Lemme 60 *Soient $A \in \mathrm{End}(V)$, m un entier positif, $\eta \in K$, B une base de V et $a := M_B(A)$. Alors $\mu_{(\eta,m)}(A) = \mu_{(\eta,m)}(a)$. Autrement dit, la multiplicité généralisée du couple (η, m) est un invariant de A.*

Démonstration : Soient A, m, η et B comme dans l'énoncé, $a := M_B(A)$, $\tilde{a} := a - \eta u_n$ et $\tilde{A} = A - \eta\, \mathrm{Id}_V$. On a $M_B(\tilde{A}) = \tilde{a}$ et $M_B(\tilde{A}^k) = M_B(\tilde{A})^k = \tilde{a}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. En particulier, on a $\mathrm{rang}\, \tilde{A}^k = \mathrm{rang}\, \tilde{a}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Donc $\mu_{(\eta,m)}(A) = \mathrm{rang}\, \tilde{A}^{m-1} - 2\,\mathrm{rang}\, \tilde{A}^{m} + \mathrm{rang}\, \tilde{A}^{m+1} = \mathrm{rang}\, \tilde{a}^{m-1} - 2\,\mathrm{rang}\, \tilde{a}^{m} + \mathrm{rang}\, \tilde{a}^{m+1} = \mu_{(\eta,m)}(a)$.

Voici le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 61 *Soient* $A \in \mathrm{End}(V)$*, m un entier positif,* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ *distincts 2 à 2 et* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *des entiers positifs tels que* $P_A = (\lambda_1 - t)^{\alpha_1}(\lambda_2 - t)^{\alpha_2} \dots (\lambda_m)^{\alpha_m}$*. Alors on a les assertions suivantes.*

a) Il existe une base B de V telle que $M_B(A)$ *est une matrice de Jordan.*

b) Soit B une base telle que $a := M_B(A)$ *est une matrice de Jordan, soit* $1 \leq j \leq m$ *et k un entier positif. Alors la multiplicité du bloc de Jordan* $\mathrm{Jor}_k(\lambda_j)$ *dans a est la multiplicité généralisée* $\mu_{(\lambda_j,k)}(A)$*. En particulier, elle ne dépend pas du choix de B.*

c) Soit B une base telle que $a := M_B(A)$ *est une matrice de Jordan et soit* $1 \leq j \leq m$*. Alors le nombre de blocs de Jordan dans a associés à* λ_j *coïncide avec la multiplicité géométrique* $\mu_{geo}(\lambda_j)$*.*

d) Pour tout $1 \leq j \leq m$*, on a*

$$\mu_{geo}(\lambda_j) = \Sigma_{k=1}^{n} \mu_{(\lambda_j,k)}(A)$$

et

$$\alpha_j = \mu_{alg}(\lambda_j) = \Sigma_{k=1}^{n} k \mu_{(\lambda_j,k)}(A).$$

Démonstration : La partie a) est une reformulation du théorème d'existence de la forme de Jordan 50. La parties b), c) et d) sont obtenues en combinant le théorème 58 et le lemme 60 ci-dessus.

Remarque 62 *Soit A un opérateur triangulable et B une base de V telle que* $a := M_B(A)$ *est une matrice de Jordan. Alors on appelle a – selon le goût – "la" ou "une" forme de Jordan de l'opérateur A. "La" exprime le fait que la matrice a est essentiellement unique, notamment à permutation des blocs de Jordan près. Puisqu'on peut permuter les blocs, certains préfèrent donc parler d'"une" forme de Jordan parce que la matrice n'est pas tout à fait unique.*

14 Une remarque sur les opérateurs quelconques

On vient de démontrer l'existence de la forme de Jordan pour des opérateurs triangulables, qui fournit une solution satisfaisante au problème principal énoncé en début de chapitre. On peut se demander si d'autres solutions sont possibles pour des opérateurs non nécessairement triangulables. La réponse à cette question est "oui". En fait, pour des opérateurs linéaires quelconques, on a toujours la forme rationelle (qui est aussi apellée la forme de Chevalley (par les francophones) ou la forme de Frobenius (plutôt en Allemagne)). La démonstration de l'existence de cette forme utilise la théorie des modules sur des anneaux principaux et le fait que les anneaux des polynômes sur des corps sont principaux. Plus précisément, on utilise le fait que si A est un opérateur d'un espace vectoriel V, on peut considérer V de manière canonique comme un module sur $K[t]$. L'existence de la forme de Jordan peut être vue comme un corollaire de l'existence de la forme rationelle.

15 Exercices

Dans tous les exercices, V est un espace vectoriel de dimension n sur K.

1. Soient $A, C \in \mathrm{End}(V)$ telles que $A \circ C = C \circ A$. Montrer que $\mathrm{Ker}(C) \leq_A V$ et $\mathrm{Im}(C) \leq_A V$. Soit V_λ un espace propre de C. Montrer que $V_\lambda \leq_A V$.
2. Soient $A \in \mathrm{End}(V), 0_V \neq v \in V$. Soit $k = max\{l \in \mathbf{N} | \{v, A(v), A^2(v), \dots, A^{l-1}(v)\}$ est une partie libre$\}$. Montrer que $U := \langle v, A(v), A^2(v), \dots, A^{k-1}(v)\rangle \leq_A V$. Si $B = \{v, A(v), A^2(v), \dots, A^{k-1}(v)\}$, décrire $M_B(A\,|_U)$.
3. Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ et $U = \mathrm{Im}(A)$ de dimension k, B' une base de U et B un prolongement de B' à une base de V. Décrire $M_B(A)$ (en fonction de $\tilde{A} = A\,|_U$). Que peut-on en déduire pour P_A ?
4. Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ tel que $A^m = 0_{\mathrm{End}(V)}$ pour un certain $m > 0$. Montrer que $A^n = 0_{\mathrm{End}(V)}$.

5. Soit $a \in M_n(K)$ une matrice triangulaire telle que toutes les entrées sur la diagonale sont nulles. Montrer que $a^n = 0_{M_n(K)}$.
6. Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ tel que $A^m = 0_{\mathrm{End}(V)}$ pour un certain $m > 0$. Que peut-on dire de $\mathrm{Im}(A)$? En utilisant l'exercice 3 et une induction sur n, montrer que $P_A = (-t)^n$.
7. Soit $A \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres, les espaces propres et les espaces propres généralisés de A.
8. Soit $A \in \mathrm{End}(V)$. Utiliser les exercices précédents pour montrer la proposition 35.
9. **Définition de somme directe** Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces de V (de dimension non-nécessairement finie). Montrer que les conditions (C1) et (C2) sont équivalentes, et qu'elles sont aussi équivalentes à (C3) si les U_i ont tous dimension finie (aide : montrer (C2)$\Rightarrow$(C3) par récurrence et (C3)$\Rightarrow$(C1) en considérant une base de chaque U_i).
(C1) $\forall u_1 \in U_1, \ldots, u_m \in U_m,\ u_1 + u_2 + \ldots + u_m = O_V \Rightarrow u_1 = u_2 = \ldots = u_m = O_V$.
(C2) $\forall 1 \le i \le m, U_i \cap (\Sigma_{j \neq i} U_j) = \{O_V\}$.
(C3) $\dim(\Sigma U_i) = \Sigma \dim(U_i)$.
Quel est le lien avec la condition (C4) $\forall i \neq j, U_i \cap U_j = \{O_V\}$?
10. Montrer le lemme 52.
11. Soient A un opérateur nilpotent de V et $1 \le i \le n$.
a) Montrer que le nombre de blocs de Jordan J_i de taille i de A vaut $\epsilon_i := \mathrm{rang}\, A^{i-1} - 2\,\mathrm{rang}\, A^i + \mathrm{rang}\, A^{i+1}$, et est donc un invariant. Il en résulte l'unicité de la forme de Jordan.
b) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\, A)$ est le nombre de blocs de Jordan de A.
c) Montrer que $\exp(A)$ est la taille du plus grand bloc de Jordan de A.
12. Soit $n = 5$. Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent tel que $\exp(A) = 3$ et $\dim(\mathrm{Ker}\, A) = 3$. Quelle est la forme de Jordan de A ?
13. Soit U comme dans l'exercice 2 et supposons $A^k(v) = -a_0 v - a_1 A(v) - \ldots - a_{k-1} A^{k-1}(v)$. Montrer que $P_{A|_U} = (-1)^k (a_0 + a_1 t + \ldots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k)$.
14. a) Soit A un opérateur nilpotent de V. Montrer que la forme de Jordan de A est “la plus simple”, càd qu'elle a le plus de zéros possibles.
b) Est-ce vrai pour un opérateur non nécessairement nilpotent ? Pour ce faire, trouver la forme de Jordan de $A \in End(\mathbb{F}_2^2)$ si
$$M_B(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
pour une certaine base B de $\mathbb{F}_2^2$.
15. Soit $n = 10$. Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ tel que $P_A = (1-t)^3(2-t)^5(3-t)^2$, $dim(V_1) = 2$ et $\exp((A - 2\,\mathrm{Id}_V)\,|_{W_2}) = 3$. Quelles sont toutes les formes de Jordan possibles pour A ?