Université Paris-Diderot
Sciences mathématiques de Paris Centre

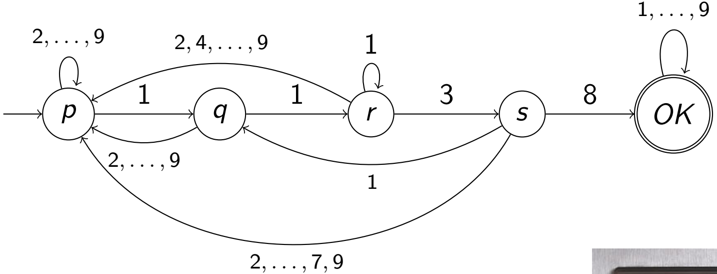
Thèse de Doctorat
Spécialité Informatique

Méthodes algébriques pour la théorie des automates

Luc Dartois

Exemple d'automate : le digicode

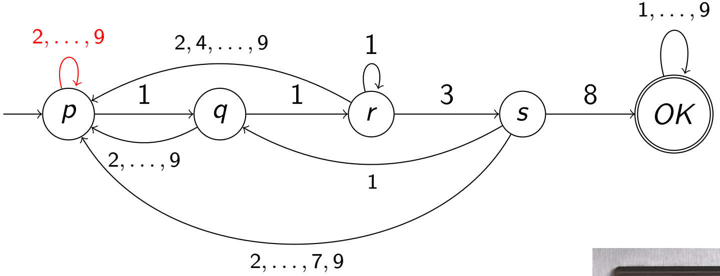
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

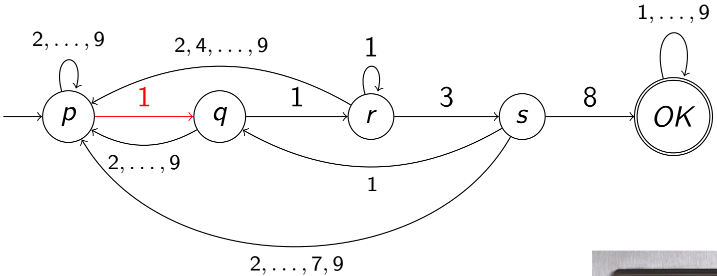
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

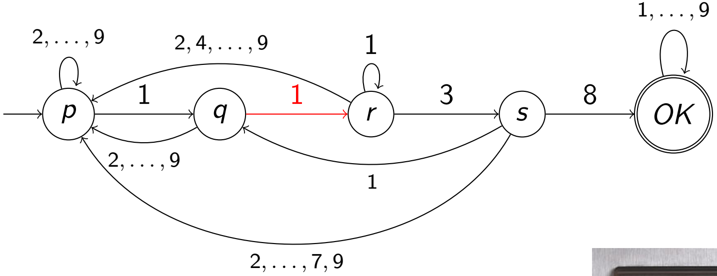
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

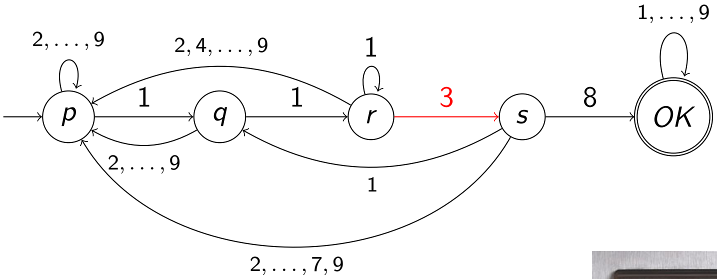
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

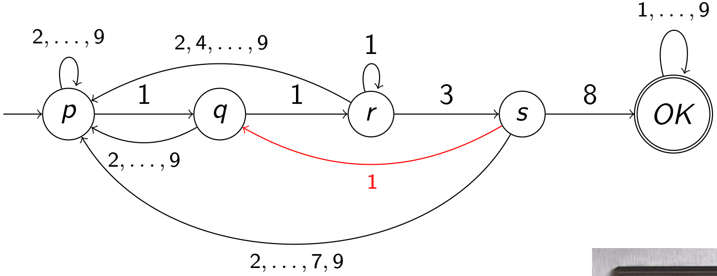
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

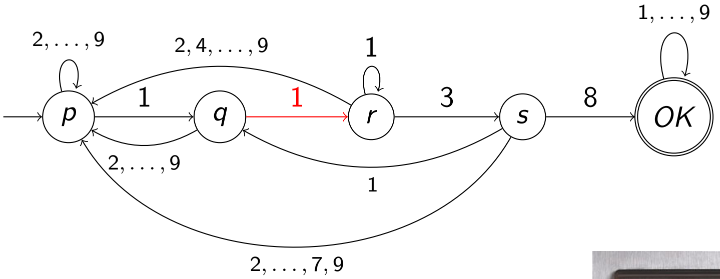
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

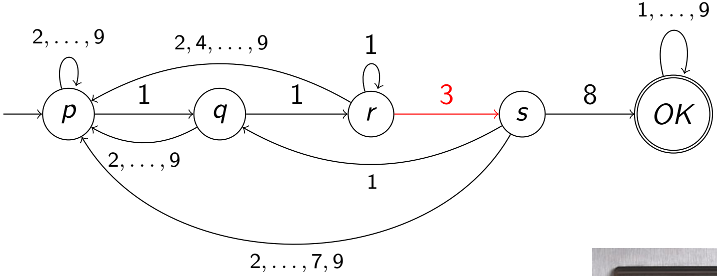
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

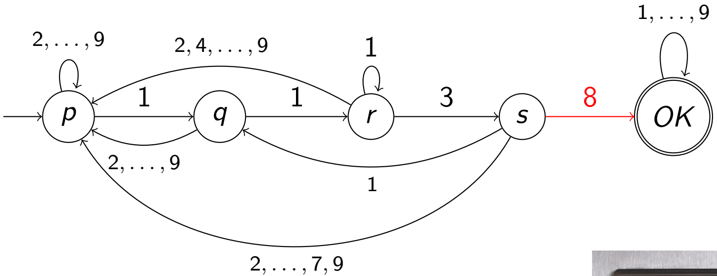
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

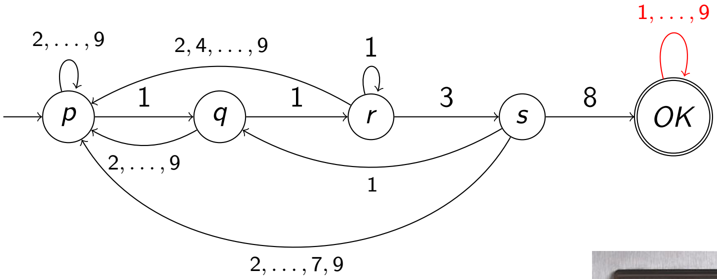
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Exemple d'automate : le digicode

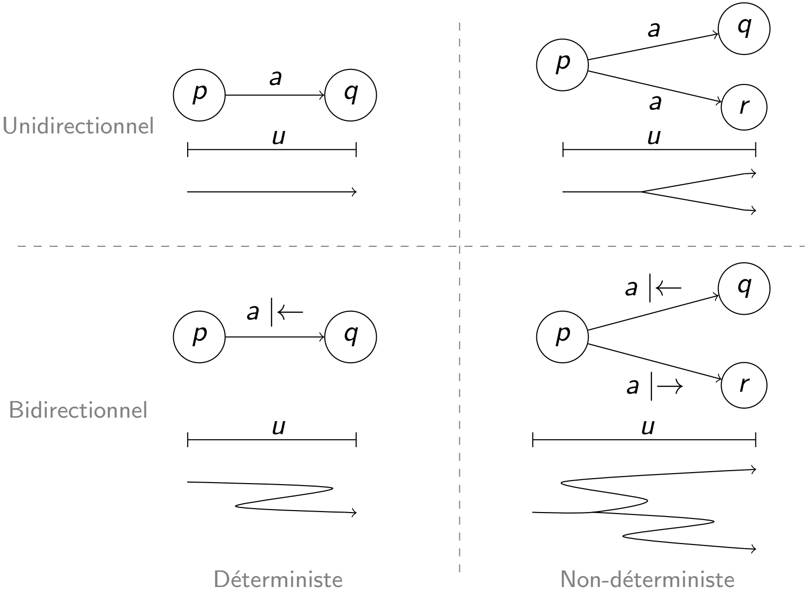
Objectif : la porte doit s'ouvrir si l'on entre le code 1138.



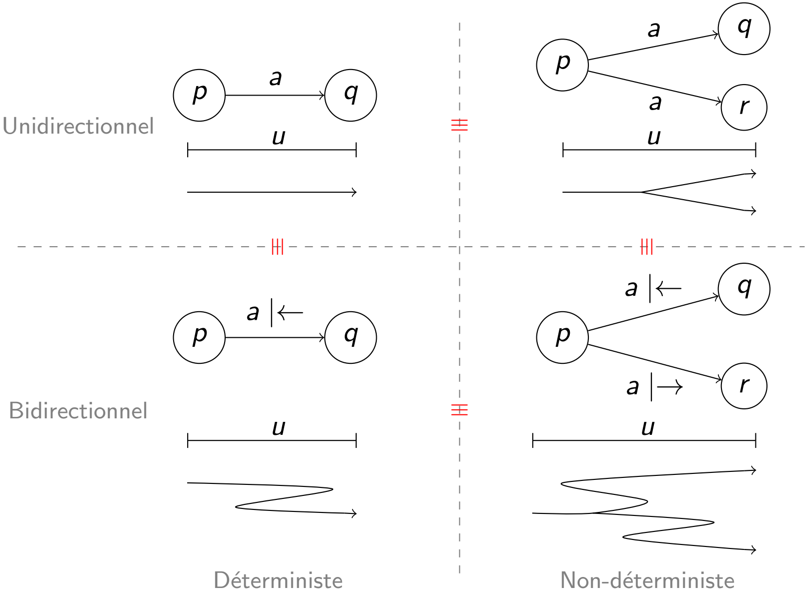
entrée : 2 1 1 3 1 1 3 8 6

Langage reconnu : $\{1, \ldots, 9\}^* 1138 \{1, \ldots, 9\}^*$

Automates


Unidirectionnel
Bidirectionnel
Déterministe
Non-déterministe
p
q
r
a
a | ←
a | →
u

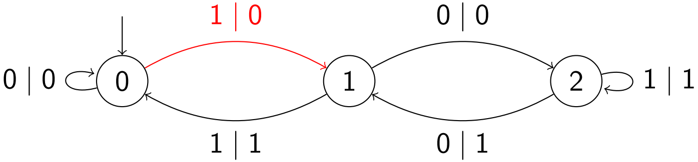
Automates



Unidirectionnel
Bidirectionnel
Déterministe
Non-déterministe
p
q
r
a
u
a |←
a |→

Automates avec sorties (ou transducteurs)

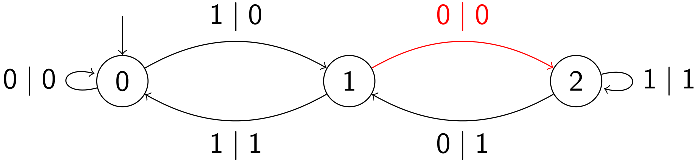
Ce transducteur réalise la division par 3 pour les nombres écrits en binaire (bit de poids fort).



entrée : $10 = 8 + 2 = 1010 \rightarrow 0$

Automates avec sorties (ou transducteurs)

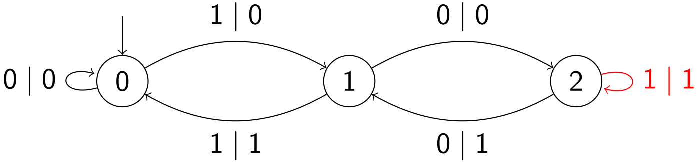
Ce transducteur réalise la division par 3 pour les nombres écrits en binaire (bit de poids fort).



entrée : $10 = 8 + 2 = 1010 \rightarrow 00$

Automates avec sorties (ou transducteurs)

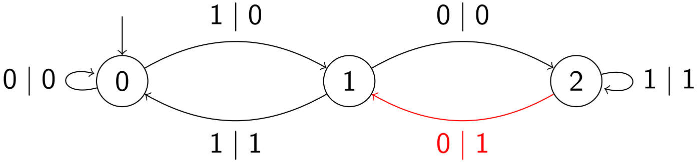
Ce transducteur réalise la division par 3 pour les nombres écrits en binaire (bit de poids fort).



entrée : $10 = 8 + 2 = 1010 \rightarrow 001$

Automates avec sorties (ou transducteurs)

Ce transducteur réalise la division par 3 pour les nombres écrits en binaire (bit de poids fort).



entrée : $10 = 8 + 2 = 1010 \to 0011 = 3$.

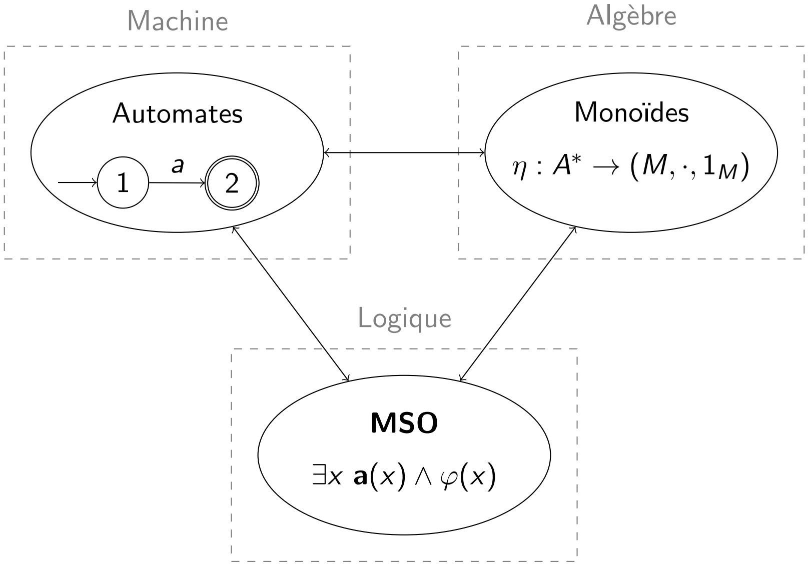
Automates avec sorties (ou transducteurs)

Unidirectionnel	Séquentiel	$\subsetneq$		Unidirectionnel non-déterministe
	$\subsetneq$ (vers le bas) $\leftarrow u \to \tilde{u}$			$\subsetneq$ (vers le bas)
Bidirectionnel	Bidirectionnel déterministe	$\subsetneq$		Bidirectionnel non-déterministe
	Déterministe		Non-déterministe	

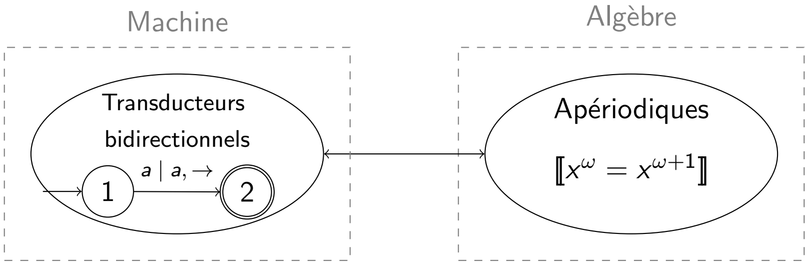
Automates avec sorties (ou transducteurs)

	Déterministe		Non-déterministe		
		$ua \to au$			
Unidirectionnel	Séquentiel	$\subsetneq$	Unidirectionnel fonctionnel	$\subsetneq$	Unidirectionnel non-déterministe
	$\not\cap$	$u \to \tilde{u}$	$\not\cap$		$\not\cap$
Bidirectionnel	Bidirectionnel déterministe	$\equiv$	Bidirectionnel fonctionnel	$\subsetneq$	Bidirectionnel non-déterministe

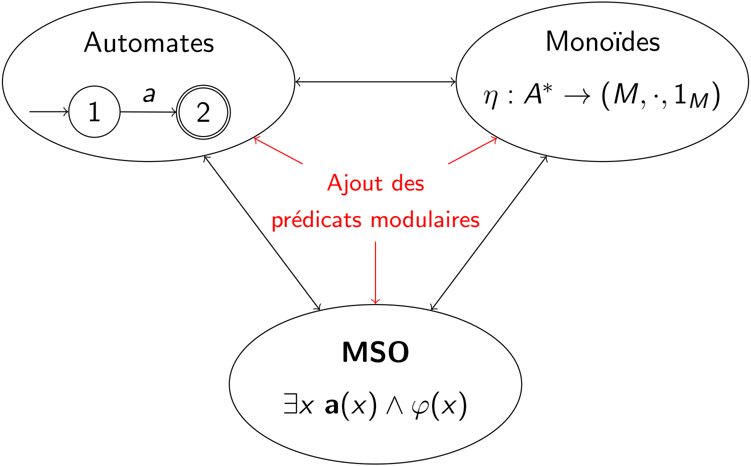
Modèles pour les langages rationnels



I. Transducteurs bidirectionnels apériodiques

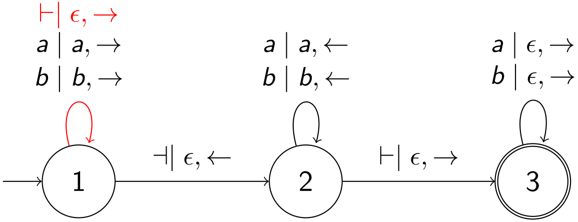


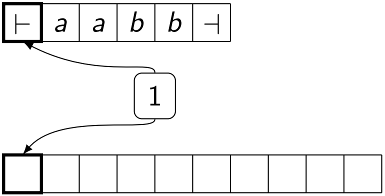
II. Ajout des prédicats modulaires



Exemple de transducteur bidirectionnel

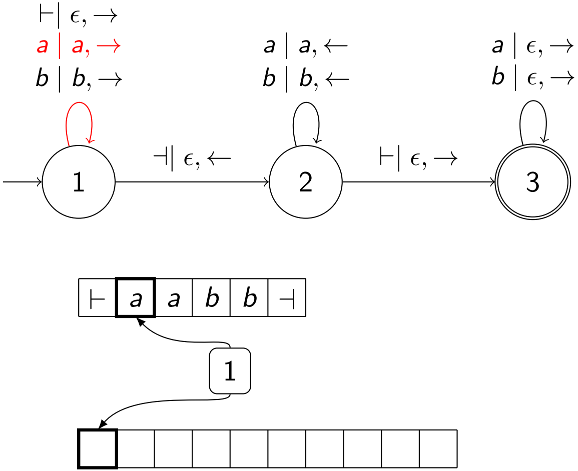
Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \rightarrow u\tilde{u}$.





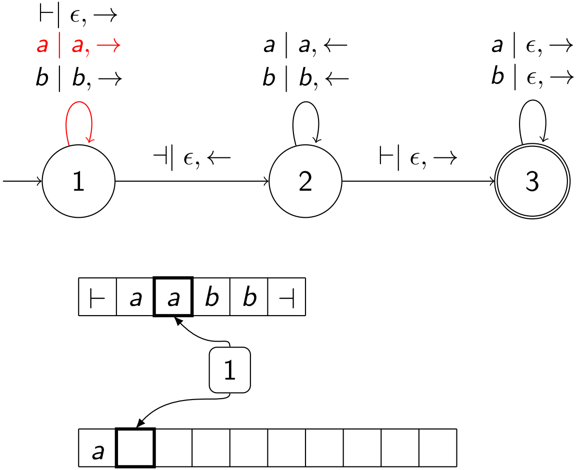
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \rightarrow u\tilde{u}$.



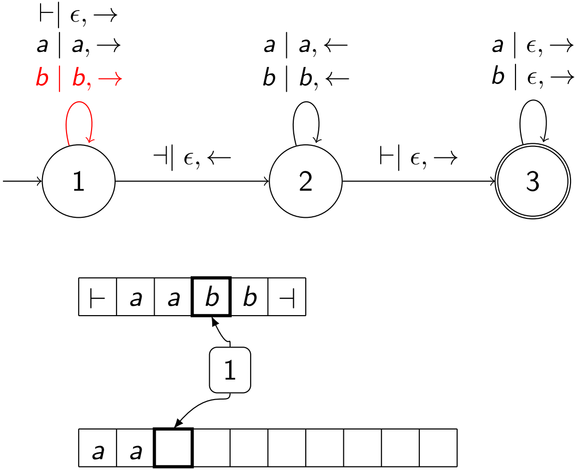
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



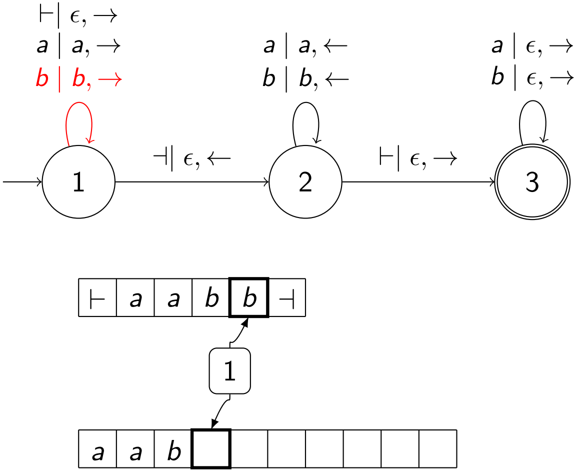
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



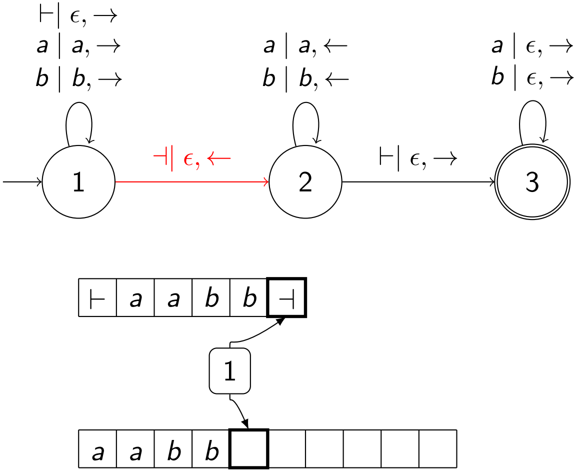
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \rightarrow u\tilde{u}$.



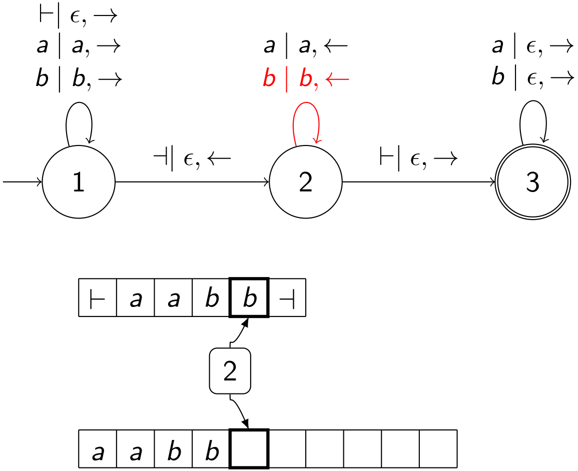
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



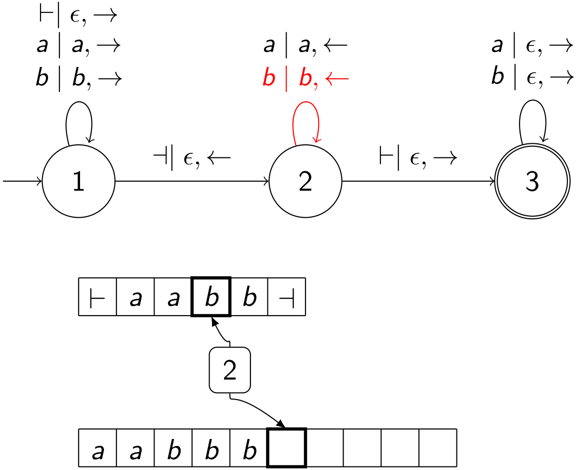
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



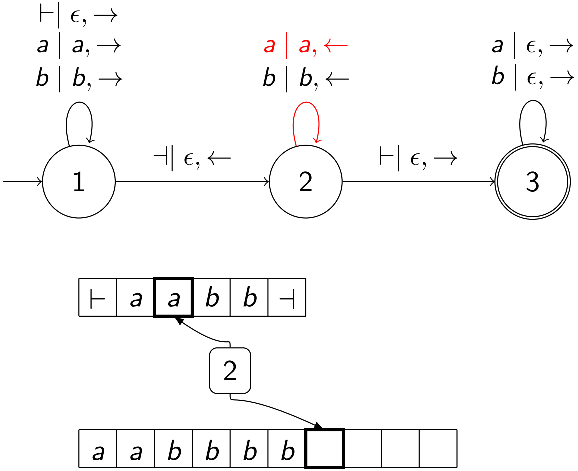
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \rightarrow u\tilde{u}$.



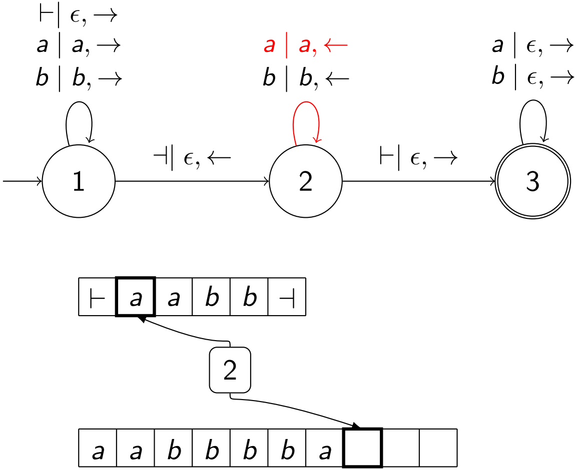
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



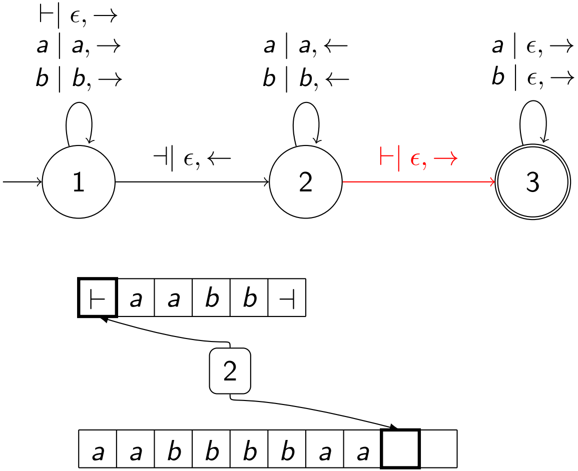
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



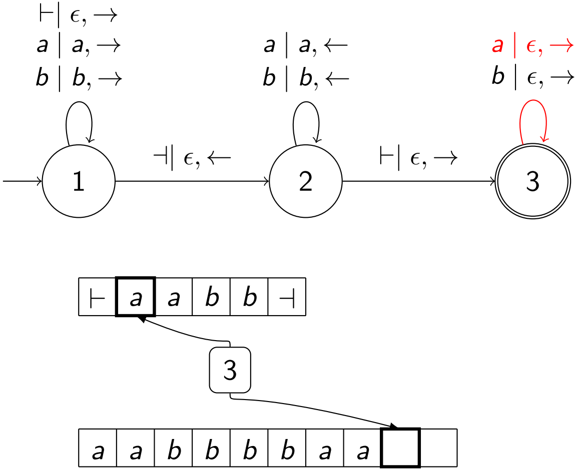
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



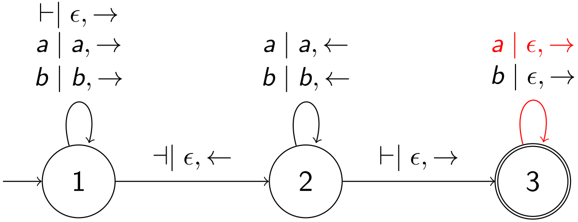
Exemple de transducteur bidirectionnel

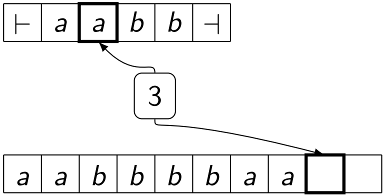
Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



Exemple de transducteur bidirectionnel

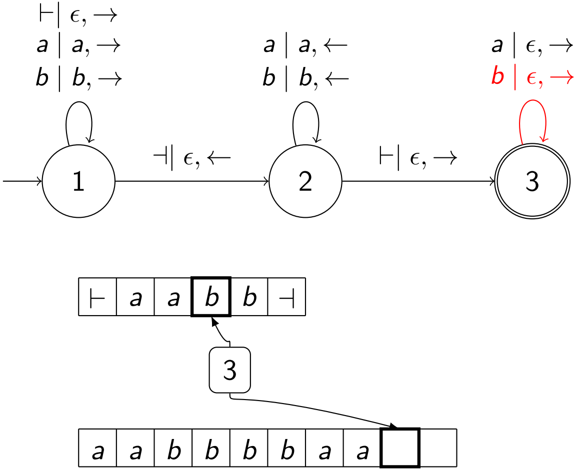
Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.





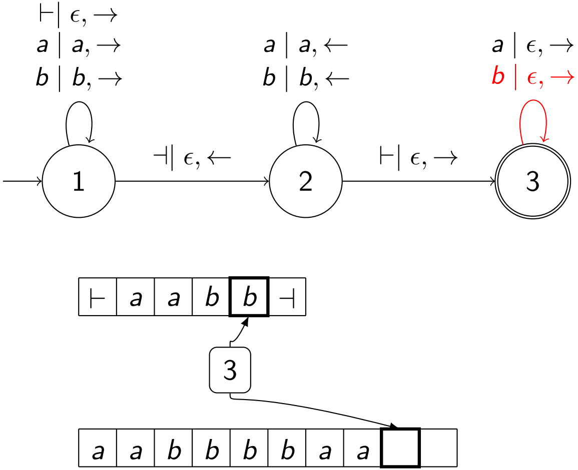
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.



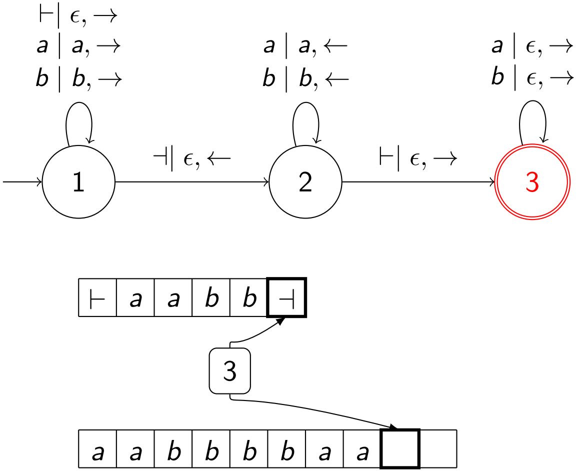
Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \to u\tilde{u}$.

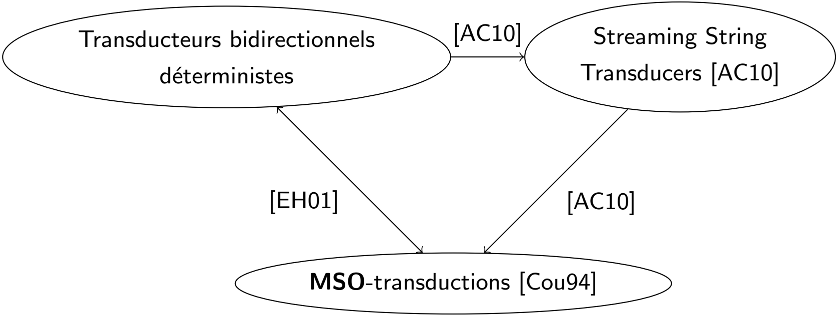


Exemple de transducteur bidirectionnel

Ce transducteur réalise la fonction miroir : $u \rightarrow u\tilde{u}$.

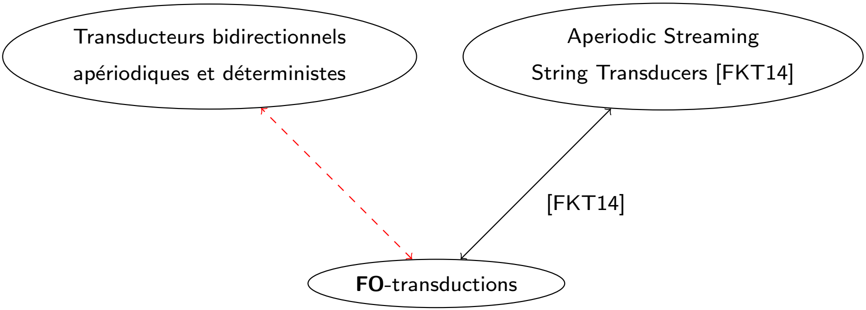


Modèles de transductions



[Courcelle 94], [Engelfriet, Hoogeboom 01], [Alur,Černý 10]

Modèles de transductions



[Filiot, Krishna, Trivedi 14]

Composition des transducteurs

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{B} \circ \mathcal{A}"'] & \mathcal{A}(u) = v \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \mathcal{B}(v) \end{tikzcd}$$

Stabilité par composition

	Séquentiel	Bidirectionnel déterministe
Générique	oui	oui
Apériodique	oui	? ?

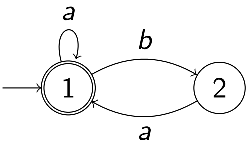
Composition des transducteurs

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{B} \circ \mathcal{A}"'] & \mathcal{A}(u) = v \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \mathcal{B}(v) \end{tikzcd}$$

Stabilité par composition

	Séquentiel	Bidirectionnel déterministe
Générique	oui	oui
Apériodique	oui	oui (Nouveau)

Monoïde de transitions dans le cas unidirectionnel



Éléments du monoïde

$u \to R_u \subseteq Q \times Q$

$R_a = \{(1,1),(2,1)\}$

Loi de composition

$R_{uv} = R_u R_v$

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \{(1,1),(2,1)\} \cdot \{(1,2)\} \\ &= \{(1,2),(2,2)\} \end{aligned}$$

ϵ	1	2
a	1	1
b	2	-
ab	2	2
ba	1	-
bb	-	-

Produits

$aa = a$

$bb = 0$

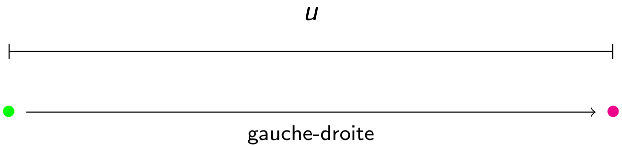
$aba = a$

$bab = b$

Éléments du monoïde de transitions

Cas unidirectionnel :

$u \to R_u \subseteq Q \times Q$

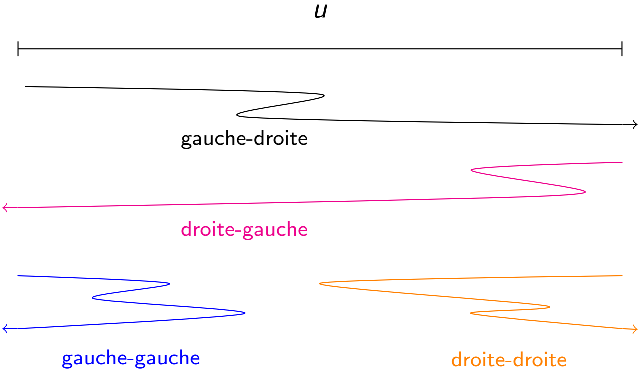


Éléments du monoïde de transitions

Cas bidirectionnel :

4 relations de $Q \times Q$

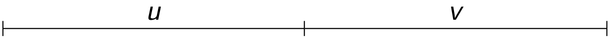
$$u \to \begin{cases} gd(u) \\ dg(u) \\ gg(u) \\ dd(u) \end{cases}$$



4 types de parcours partiels

[Shepherdson 59], [Pécuchet 85], [Birget 89]

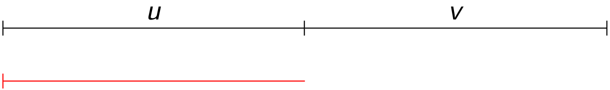
Loi de composition des parcours



Cas unidirectionnel :

$$R_{uv} =$$

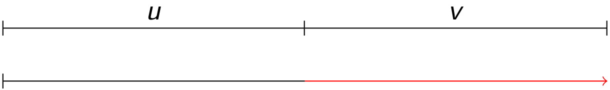
Loi de composition des parcours



Cas unidirectionnel :

$$R_{uv} = R_u$$

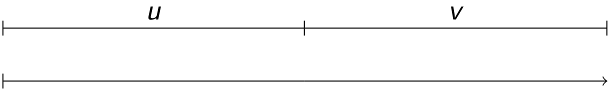
Loi de composition des parcours



Cas unidirectionnel :

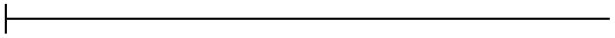
$$R_{uv} = R_u R_v$$

Loi de composition des parcours



Cas unidirectionnel :

$$R_{uv} = R_u R_v$$



Cas bidirectionnel :

$$gd(uv) = gd(u)$$

[Shepherdson 59], [Pécuchet 85], [Birget 89]

Loi de composition des parcours

u v

Cas unidirectionnel :

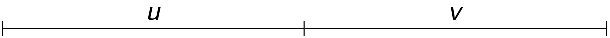
$$R_{uv} = R_u R_v$$

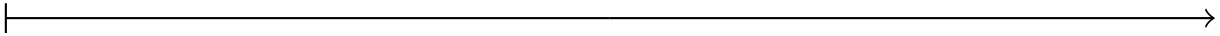
Cas bidirectionnel :

$$gd(uv) = gd(u) \qquad gd(v)$$

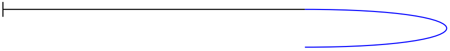
[Shepherdson 59], [Pécuchet 85], [Birget 89]

Loi de composition des parcours



Cas unidirectionnel : 

$$R_{uv} = R_u R_v$$

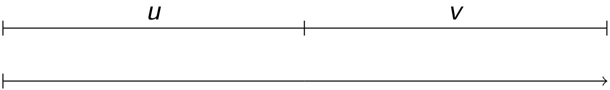


Cas bidirectionnel :

$$gd(uv) = gd(u)\ gg(v)$$

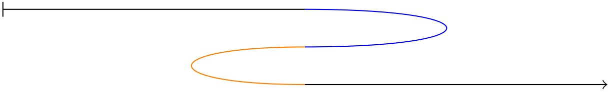
[Shepherdson 59], [Pécuchet 85], [Birget 89]

Loi de composition des parcours



Cas unidirectionnel :

$$R_{uv} = R_u R_v$$

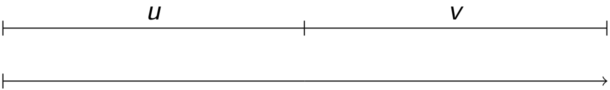


Cas bidirectionnel :

$$gd(uv) = gd(u)\ \ gg(v)dd(u)\ \ \ gd(v)$$

[Shepherdson 59], [Pécuchet 85], [Birget 89]

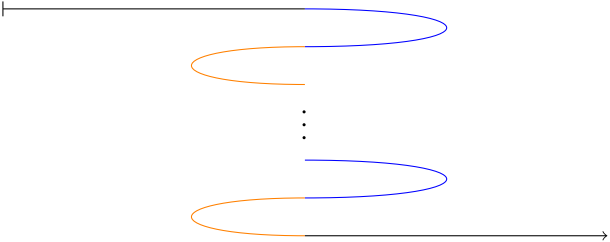
Loi de composition des parcours



Cas unidirectionnel :

$$R_{uv} = R_u R_v$$

Cas bidirectionnel :



$$gd(uv) = gd(u)\big(gg(v)dd(u)\big)^* gd(v)$$

[Shepherdson 59], [Pécuchet 85], [Birget 89]

Composition des Transducteurs

Un transducteur bidirectionnel est *apériodique* si son monoïde de transitions est apériodique, i.e. s'il existe un entier n tel que pour tout mot u, u^n et u^{n+1} ont les mêmes parcours.

Théorème [Chytil, Jákl 77]

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux transducteurs bidirectionnels, déterministes, et composables.

Alors on peut effectivement construire un transducteur $\mathcal{C}$ déterministe et tel que $\mathcal{C} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{B} \circ \mathcal{A}"'] & \mathcal{A}(u) = v \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \mathcal{B}(v) \end{tikzcd}$$

Composition des Transducteurs

Un transducteur bidirectionnel est *apériodique* si son monoïde de transitions est apériodique, i.e. s'il existe un entier n tel que pour tout mot u, u^n et u^{n+1} ont les mêmes parcours.

Théorème [Carton, D.]

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux transducteurs bidirectionnels, déterministes, apériodiques et composables.
Alors on peut effectivement construire un transducteur $\mathcal{C}$ déterministe et apériodiques tel que $\mathcal{C} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$.

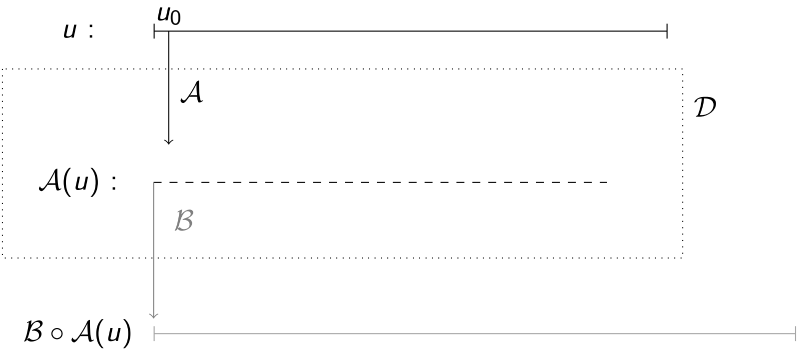
$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{B} \circ \mathcal{A}"'] & \mathcal{A}(u) = v \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \mathcal{B}(v)
\end{tikzcd}$$

Cas particulier

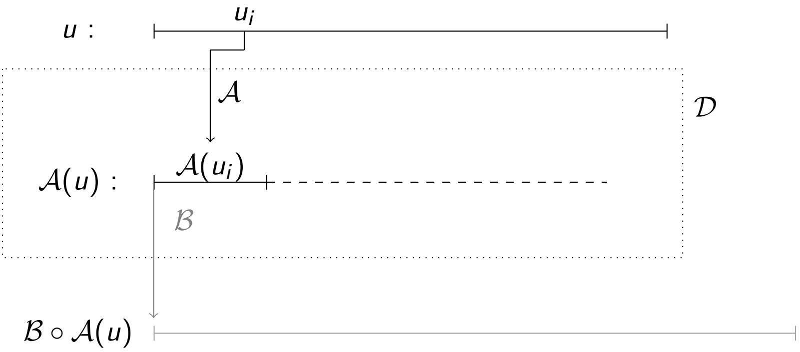
Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un transducteur unidirectionnel et $\mathcal{B}$ un transducteur bidirectionnel, tous deux déterministes et apériodiques.
Alors on peut effectivement construire un transducteur $\mathcal{D}$ déterministe et apériodique tel que $\mathcal{D} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$.

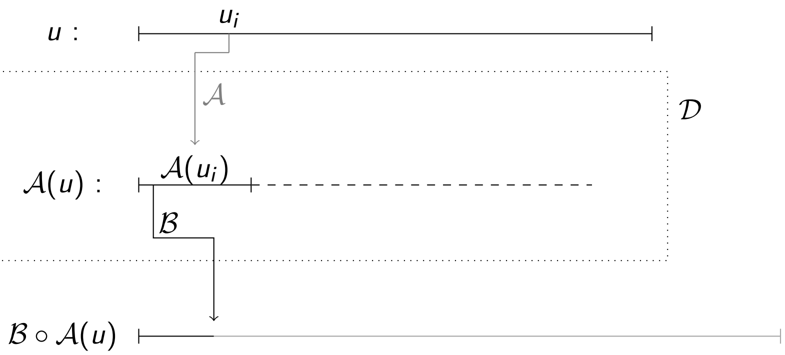
Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$



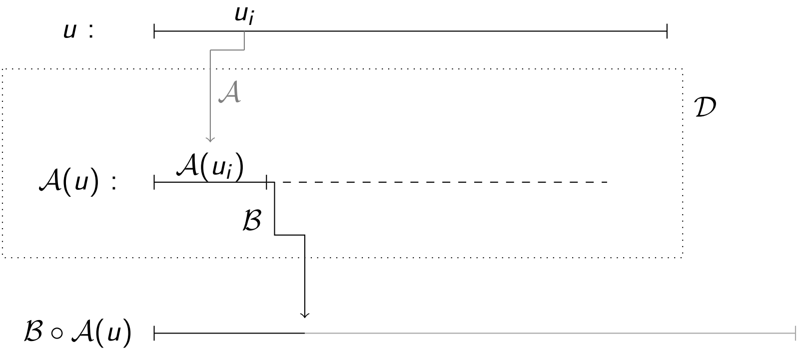
Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$



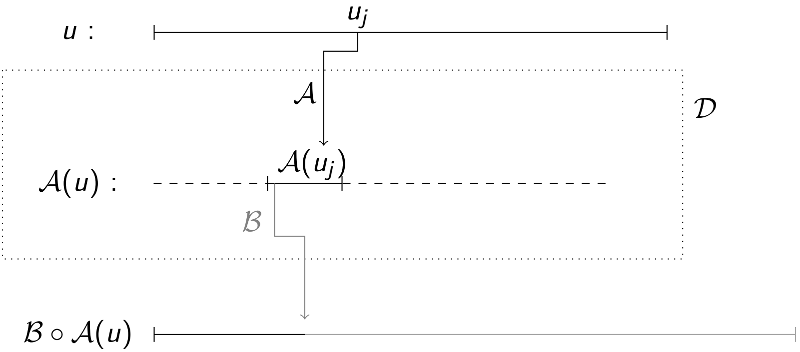
Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$



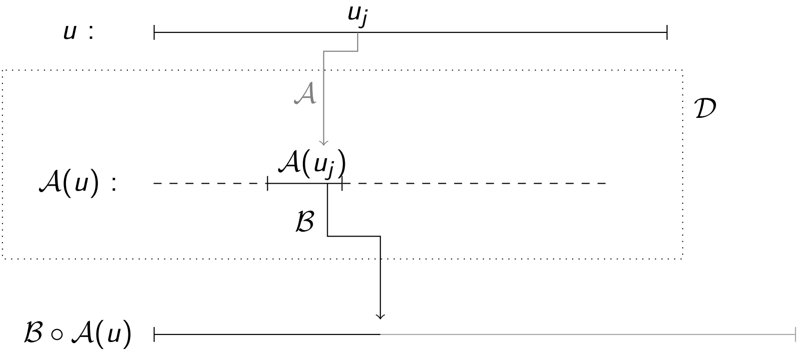
Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$



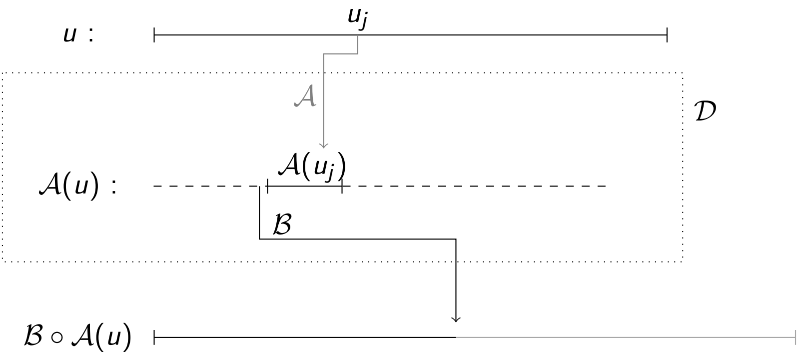
Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$



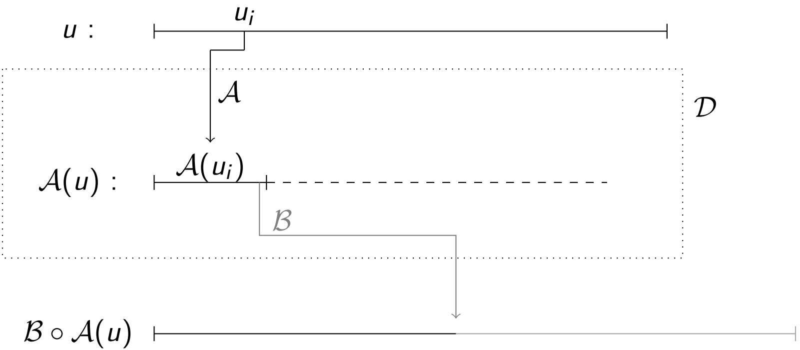
Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$



Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$

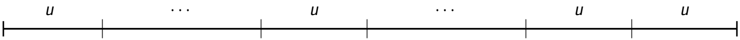


Fonctionnement du transducteur $\mathcal{D}$



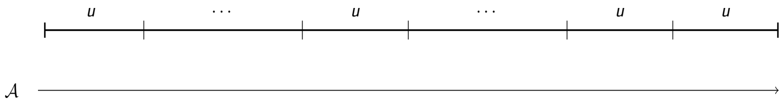
Apériodicité du transducteur $\mathcal{D}$

$n = O(n_{\mathcal{A}} + n_{\mathcal{B}})$
$gd_{\mathcal{D}}(u^n) = gd_{\mathcal{D}}(u^{n+1})$



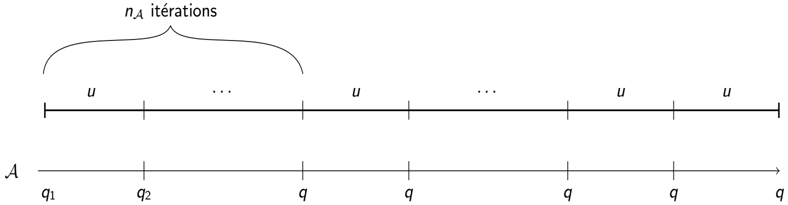
Apériodicité du transducteur $\mathcal{D}$

$n = O(n_{\mathcal{A}} + n_{\mathcal{B}})$
$gd_{\mathcal{D}}(u^n) = gd_{\mathcal{D}}(u^{n+1})$



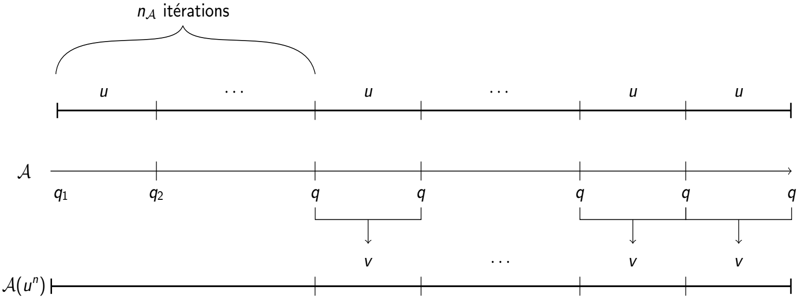
Apériodicité du transducteur $\mathcal{D}$

$n = O(n_\mathcal{A} + n_\mathcal{B})$
$gd_\mathcal{D}(u^n) = gd_\mathcal{D}(u^{n+1})$



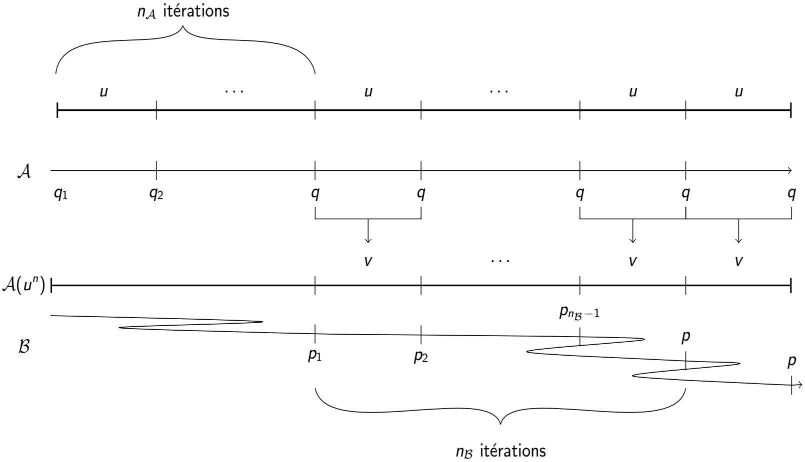
Apériodicité du transducteur $\mathcal{D}$

$n = O(n_{\mathcal{A}} + n_{\mathcal{B}})$
$gd_{\mathcal{D}}(u^n) = gd_{\mathcal{D}}(u^{n+1})$

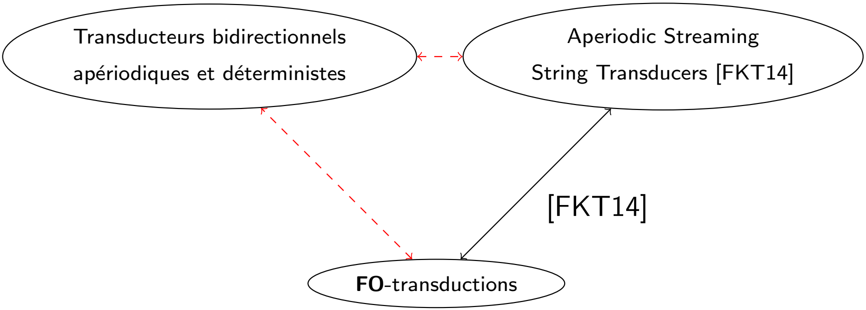


Apériodicité du transducteur $\mathcal{D}$

$n = O(n_{\mathcal{A}} + n_{\mathcal{B}})$
$gd_{\mathcal{D}}(u^n) = gd_{\mathcal{D}}(u^{n+1})$

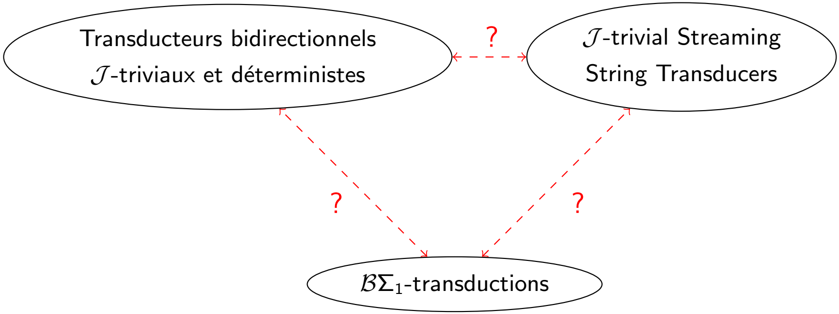


Travaux en cours

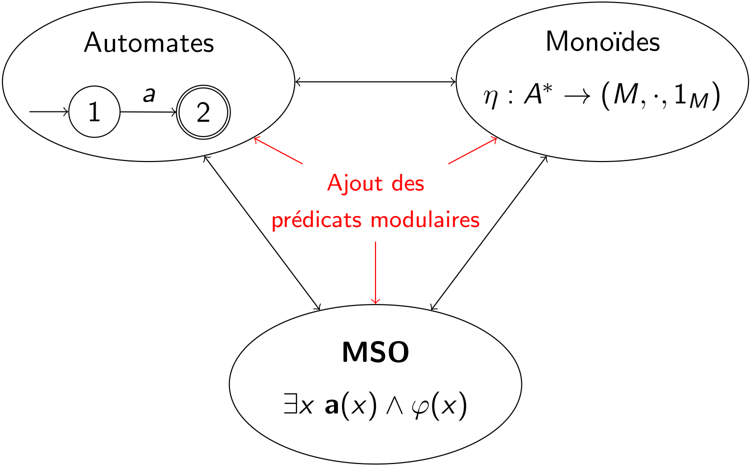


[Filiot, Krishna, Trivedi 14]

Perspectives



Ajout des prédicats modulaires



Logique monadique du second ordre

- Modèles : mots finis sur un alphabet fini.

$$abba = (\{0,1,2,3\}, \mathbf{a} = \{0,3\}, \mathbf{b} = \{1,2\}, \ldots)$$

- Logique monadique du second ordre :

$$\top \mid \varphi \wedge \varphi \mid \neg\varphi \mid \forall x \varphi \mid \forall X \varphi \mid x \in X \mid \mathbf{a}(x) \mid x < y$$

$$\varphi \equiv \exists x\ \mathbf{a}(x) \wedge \forall y \big(x < y \to \mathbf{a}(y)\big) \wedge \big(y < x \to \mathbf{b}(y)\big)$$

$$L(\varphi) = b^* a a^*$$

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

Pour tout entiers $0 \leqslant i < d$,

- un prédicat unaire $MOD_i^d(x)$, satisfait si $x \equiv i \bmod d$,
- un prédicat 0-aire D_i^d, satisfait si $|u| \equiv i \bmod d$.

MOD est l'ensemble des prédicats $MOD_i^d(x)$, D_i^d, pour $0 \leqslant i < d$.

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

Pour tout entiers $0 \leqslant i < d$,

- un prédicat unaire $MOD_i^d(x)$, satisfait si $x \equiv i \bmod d$,
- un prédicat 0-aire D_i^d, satisfait si $|u| \equiv i \bmod d$.

MOD est l'ensemble des prédicats $MOD_i^d(x)$, D_i^d, pour $0 \leqslant i < d$.

$\psi \equiv \exists x \ \big(\mathbf{a}(x) \wedge MOD_0^3(x)\big) \wedge D_1^3$.
$L(\psi) = (A^3)^* a (A^3)^*$.

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

Pour tout entiers $0 \leqslant i < d$,

- un prédicat unaire $MOD_i^d(x)$, satisfait si $x \equiv i \bmod d$,
- un prédicat 0-aire D_i^d, satisfait si $|u| \equiv i \bmod d$.

MOD est l'ensemble des prédicats $MOD_i^d(x)$, D_i^d, pour $0 \leqslant i < d$.

$\psi \equiv \exists x \ \big(\mathbf{a}(x) \wedge MOD_0^3(x)\big) \wedge D_1^3$.
$L(\psi) = (A^3)^* a (A^3)^*$.

$\varphi \equiv \exists x \ \big(\mathbf{a}(x) \wedge MOD_0^3(x) \wedge MOD_1^2(x)\big)$.

$L(\varphi) = (A^6)^* A^3 a A^*$.

Prédicats modulaires

Prédicats modulaires

Pour tout entiers $0 \leqslant i < d$,

- un prédicat unaire $MOD_i^d(x)$, satisfait si $x \equiv i \bmod d$,
- un prédicat 0-aire D_i^d, satisfait si $|u| \equiv i \bmod d$.

MOD est l'ensemble des prédicats $MOD_i^d(x)$, D_i^d, pour $0 \leqslant i < d$.

$\psi \equiv \exists x \; \big(\mathbf{a}(x) \wedge MOD_0^3(x)\big) \wedge D_1^3$.
$L(\psi) = (A^3)^* a (A^3)^*$.

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \exists x \; \big(\mathbf{a}(x) \wedge MOD_0^3(x) \wedge MOD_1^2(x)\big).\\ &\equiv \exists x \; \big(\mathbf{a}(x) \wedge MOD_3^6(x)\big).\end{aligned}$$
$L(\varphi) = (A^6)^* A^3 a A^*$.

Questions de logique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de la logique sur les mots finis.

Problème de la définissabilité

Soit L un langage régulier.
Existe-t-il une formule φ de $\mathcal{F}[\sigma]$ telle que $L = L(\varphi)$?

Questions de logique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de la logique sur les mots finis.

Problème de la définissabilité

Soit L un langage régulier.
Existe-t-il une formule φ de $\mathcal{F}[\sigma]$ telle que $L = L(\varphi)$?

Problème de transfert

La décidabilité de $\mathcal{F}[\sigma]$ implique-t-elle celle de $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}]$?

Résultats connus

$\mathcal{B}\Sigma_1[<]$: Formules du premier ordre de profondeur de quantification 1,
J : Monoïde dont la relation de division est l'égalité,
QV : Morphisme η tel que $\eta((A^d)^*)$ appartient à **V**.

Fragment	Caractérisation algébrique	Référence
$\mathcal{B}\Sigma_1[<]$	**J**	[Sim75]
$\mathcal{B}\Sigma_1[< \mathrm{MOD}]$	**J** $*$ **MOD**	[CPS06]
$\Sigma_2[<, \mathrm{MOD}]$	Effective	[KW14]
FO$[<]$	**A**	[MP71] & [Sch65]
FO$[<, \mathrm{MOD}]$	**QA**	[BCST92]

[Schützenberger 65], [McNaughton, Papert 71], [Simon 75], [Barrington, Compton, Straubing, Thérien 92], [Chaubard, Pin, Straubing 06], [Kufleitner, Walter 14]

Caractérisation algébrique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de la logique sur les mots finis.

Théorème [D.,Paperman], [Kufleitner, Walter 14]

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est caractérisé par la variété de monoïdes **V**.
Alors pour tout langage régulier *L*, les propositions suivantes sont équivalentes :

- *L* est définissable par une formule de $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}]$,
- Le morphisme syntaxique de *L* appartient à la *lm*-variété de timbres (variétés de morphismes syntaxiques) $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}$.

Caractérisation algébrique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de la logique sur les mots finis.

Théorème [D.,Paperman], [Kufleitner, Walter 14]

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est caractérisé par la variété de monoïdes **V**.
Alors pour tout langage régulier *L*, les propositions suivantes sont équivalentes :

- *L* est définissable par une formule de $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}]$,
- Le morphisme syntaxique de *L* appartient à la *lm*-variété de timbres (variétés de morphismes syntaxiques) $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}$.

Problème

Le produit semidirect ne préserve pas la décidabilité.

Caractérisation algébrique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de la logique sur les mots finis.

Théorème [D.,Paperman], [Kufleitner, Walter 14]

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est caractérisé par la variété de monoïdes $\mathbf{V}$.
Alors pour tout langage régulier L et tout entier d, les propositions suivantes sont équivalentes :

- L est définissable par une formule de $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}_d]$,
- Le morphisme syntaxique de L appartient à la *lm*-variété de timbres $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_d$.

Caractérisation algébrique

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de la logique sur les mots finis.

Théorème [D.,Paperman], [Kufleitner, Walter 14]

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est caractérisé par la variété de monoïdes $\mathbf{V}$.
Alors pour tout langage régulier L et tout entier d, les propositions suivantes sont équivalentes :

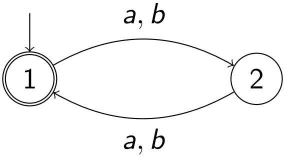
- L est définissable par une formule de $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}_d]$,
- Le morphisme syntaxique de L appartient à la *lm*-variété de timbres $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_d$.

Deux sous-problèmes

Décision Décidabilité de $\mathbf{V} * \mathbf{MOD}_d$.

Délai Peut-on calculer un entier d tel que L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}]$ ssi L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}_d]$?

Automate 2-itéré



Langage $(A^2)^*$, monoïde de transitions : C_2

Automate 2-itéré

Langage $(A^2)^*$, monoïde 2-itéré trivial

Automate 2-itéré

Langage $(A^2)^*$, monoïde 4-itéré isomorphe au 2-itéré

Automate 2-itéré

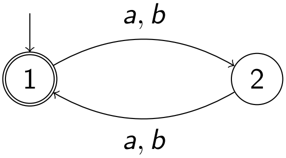
Langage $(A^2)^*$, monoïde 4-itéré isomorphe au 2-itéré

Indice de stabilité (d'après [Straubing 94])

Pour tout langage régulier L, il existe un plus petit entier s tel que ses automates minimaux s-itéré et $2s$-itéré soient isomorphes. Algébriquement, on a $A^s \equiv_L A^{2s} \equiv_L A^{3s} \equiv_L \ldots$.

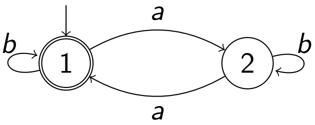
Pertinence de l'indice de stabilité

Langage $(A^2)^*$



monoïde de transitions : C_2

Langage parité (nombre pair de a)

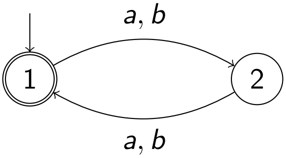


monoïde de transitions : C_2

Pertinence de l'indice de stabilité

Langage $(A^2)^*$

$s = 2$

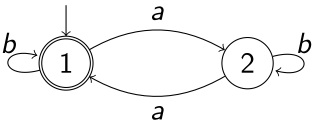


monoïde de transitions : C_2

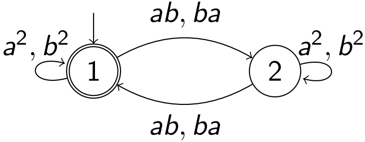
monoïde 2-itéré trivial

Langage parité (nombre pair de a)

$s = 1$



monoïde de transitions : C_2



monoïde 2-itéré C_2

Cas de $\mathbf{FO}^2[<, \mathrm{MOD}]$

Théorème [D.,Paperman (STACS13)]

Soit L un langage régulier d'indice de stabilité s. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- L est définissable dans $\mathbf{FO}^2[<, \mathrm{MOD}]$,
- L est définissable dans $\mathbf{FO}^2[<, \mathrm{MOD}_s]$,
- Le morphisme syntaxique η de L appartient à $\mathbf{DA} * \mathbf{MOD} = \mathbf{QDA}$,
- Le sous-monoïde $\eta(A^s)$ appartient à $\mathbf{DA}$.

Généralisable ?

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique caractérisé par la variété **V**.

Généralisation ?

Soit L un langage régulier d'indice de stabilité s. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}]$,
- L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}_s]$,
- Le morphisme syntaxique η de L appartient à $\mathbf{V} * \mathbf{MOD} = \mathbf{QV}$,
- Le sous-monoïde $\eta(A^s)$ appartient à **V**.

Généralisable ?

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment de logique caractérisé par la variété **V**.

Généralisation ? Non

Soit L un langage régulier d'indice de stabilité s. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}]$,
- (L est définissable dans $\mathcal{F}[\sigma, \mathrm{MOD}_s]$,) Problème ouvert
- Le morphisme syntaxique η de L appartient à $\mathbf{V} * \mathbf{MOD} \subseteq \mathbf{QV}$ (en particulier $\mathbf{J} * \mathbf{MOD} \subsetneq \mathbf{QJ}$),
- ~~Le sous-monoïde $\eta(A^s)$ appartient à **V**~~.

Résultats de décidabilité

Fragment	Caractérisation algébrique	Délai
$\mathcal{B}\Sigma_1[<, \mathrm{MOD}]$	$\mathbf{J} * \mathbf{MOD}$ [CPS06]	$2s$ (s par [CPS06]) Décidable
$\mathbf{FO}[<, \mathrm{MOD}]$	$\mathbf{QA}$ [BCST92]	s Décidable
$\mathbf{FO}^1[\mathrm{MOD}]$	$\mathbf{QJ}_1$ Nouveau	s Décidable
$\mathbf{FO}^2[<, \mathrm{MOD}]$	$\mathbf{QDA}$ Nouveau, [DP13]	s Décidable
$\mathbf{FO}[=, \mathrm{MOD}]$	$\mathbf{ACom} * \mathbf{MOD}$ Nouveau	$2s$ Décidable
$\mathbf{FO}^2_k[<, \mathrm{MOD}]$	$\mathbf{V}_k * \mathbf{MOD}$ Nouveau	$2ks$ Décidable

Perspectives (Prédicats modulaires)

- L'ajout des prédicats modulaires correspond algébriquement à un produit semidirect par **MOD**.
- C'est une caractérisation non effective, cependant :
- On a une réponse positive et effective pour la plupart des fragments connus (**FO**, $\mathbf{FO}^2$, $\mathbf{FO}^2_k$, $\mathcal{B}\Sigma_1$, $\mathcal{B}\Sigma_k$?).

Perspectives (Prédicats modulaires)

- L'ajout des prédicats modulaires correspond algébriquement à un produit semidirect par **MOD**.
- C'est une caractérisation non effective, cependant :
- On a une réponse positive et effective pour la plupart des fragments connus (**FO**, $\mathbf{FO}^2$, $\mathbf{FO}^2_k$, $\mathcal{B}\Sigma_1$, $\mathcal{B}\Sigma_k$?).
- Ensuite ?
  - L'indice de stabilité est-il toujours un indice de délai ?
  - Les méthodes semblent s'étendre aux variétés positives (Σ_k ?) ou aux *ne*-variétés,
  - Cette approche reste valable pour tout ensemble de prédicats unaires ayant une caractérisation algébrique (prédicats locaux unaires, prédicats algébriques).