

Pumping Lemma



INFO010 – Théorie des langages – Partie pratique

S. Collette

G. Geeraerts

Si

L est un langage régulier

alors

$\exists n$ tel que $\forall z \in L$ avec $|z| \geq n$, on peut trouver une découpe de z en uvw telle que :

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- $\forall i \geq 0 \ uv^i w \in L$

Utilité du Pumping Lemma

On se sert de ce lemme pour montrer qu'un langage n'est **pas** régulier.

Par exemple : Supposons que $L = \{0^k 1^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est régulier.

- Par le P.L., il existe n , qui nous permet de découper chaque mot de L de longueur supérieure à n , tel que les propriétés du P.L. restent valides.
- Considérons $0^n 1^n$ dont la longueur est bien supérieure à n .

Utilité du Pumping Lemma – 2

- Donc il existe $xyz = 0^n 1^n$ et $|xy| \leq n$.
- y ne peut donc contenir que des 0 (au moins 1).
- Considérons $xy^0 z$. D'après le P.L il appartient à $L \dots$
- \dots mais il contient au moins un 1 de plus que de 0.
- Contradiction : L n'est donc pas régulier.

Exercices

- 1 Donnez, de manière formelle, la contraposée du *Pumping Lemma* pour les langages réguliers.
- 2 Le langage $L = \{1^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\}$ est-il régulier ?
Prouvez votre réponse
- 3 Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$, on dénote par w^M l'image miroir de ce mot. On définit alors le langage $L_p = \{ww^M \mid w \in \Sigma^*\}$, qui contient donc tous les palindromes. Par exemple :
Élu par cette crapule
Étant donné l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, L_p est-il régulier ?
Prouvez votre réponse.

Solution de l'exercice 1

Commençons par formaliser le P.L. : **Prenons maintenant la contraposée :**

L est régulier \Rightarrow

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$

$\neg (z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\Rightarrow \vee$

$(\exists uvw \in \Sigma^* : z = uvw$

$|uv| \leq n$

$\wedge |v| \geq 1$

$\wedge \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$

$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$

$(z \in L \wedge |z| \geq n)$

\wedge

$(\forall uvw \in \Sigma^* : z = uvw$

$|uv| > n$

$\vee |v| < 1$

$\vee \exists i \geq 0 : uv^i w \notin L)$

$\Rightarrow L$ n'est pas régulier

Solution de l'exercice 2

- Supposons que L est régulier.
- Il existe donc un n qui nous permet de découper les mots de L selon les conditions du P.L.
- Considérons le mot $w = 1^{n^2}$. Clairement, $|w| \geq n$.
- On peut donc découper w en xyz .
- Selon le P.L., $xyyz \in L$, ce qui implique que $|xyyz|$ est un carré parfait.
- Oui, mais...

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned} n^2 &= |w| \\ &= |xyz| \\ &< |xyyz| \\ &\leq n^2 + n \\ &< n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Donc : $n^2 < |xyyz| < (n + 1)^2$ et donc $|xyyz|$ n'est pas un carré et $xyyz \notin L \dots$

Solution de l'exercice 3

- Supposons que L_p est régulier.
- Il existe donc $n \dots$
- Considérons $w = 0^n 1 10^n \in L_p$; clairement $|w| > n$.
- Selon le P.L., il existe donc une découpe $w = xyz$ telle que $|xy| \leq n$.
- Donc y ne peut contenir que des 0 (au moins un).
- D'après le P.L., $xz = 0^m 1 10^n \in L_p$ (avec $m < n$).

Solution de l'exercice 3

- Or ce mot contient moins de 0 à gauche qu'à droite. . .
- . . . Il n'appartient donc pas à L !

C.Q.F.D.

Exercice supplémentaire

Soit w un mot sur l'alphabet Σ . Pour tout $c \in \Sigma$, nous notons $|w|_c$ pour représenter le nombre de c qui apparaissent dans w .

Le **langage de Dyck** est le langage de tous les mots $w_1 \dots w_n$ sur $\Sigma = \{ (,) \}$ tels que :

$$|w|_) = |w|_ (\\ \wedge$$

$$\forall 1 \leq i \leq n : w_i =) \Rightarrow |w_1 \dots w_{i-1}|_ (> |w_1 \dots w_{i-1}|_)$$

Ce langage est-il régulier ? Démontrez.

Exercice supplémentaire – Correction

- Supposons que ce langage est régulier.
- Donc **il existe** une constante n telle que, **pour tout mot** z du langage avec $|z| \geq n$, le PL est vérifié.
- Cela doit donc être vrai pour :

$$z = \underbrace{((\dots()))}_n \underbrace{(\dots))}_n$$

Exercice supplémentaire – Correction

- Donc **pour toute** découpe de z en uvw telle que $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$, les mots de la forme $uv^i w$ **devraient** être dans le langage.
- Mais si $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$, alors v ne contient que des $($.
- Donc, le mot $uv^0 w = uv$ est le mot

$$\underbrace{((\dots ()))}_{n-|v| < n} \underbrace{)}_n$$

et ce mot n'est clairement **pas dans le langage**.

- **Contradiction** : ce langage n'est pas régulier.

Exercices

- 4 Donnez, de manière formelle, la contraposée du *Pumping Lemma* pour les langages *Context Free*.
- 5 Montrez que $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$ n'est pas un CFL.

Pumping Lemma – langages Context-Free

Si
 L est un langage *context-free*
alors

$\exists n$ tel que, si $z \in L$ et $|z| \geq n$, alors on peut découper z en $uvwxy$ tel que :

- $|vwx| \leq n$
- $vx \neq \varepsilon$
- $\forall i \geq 0 \ uv^i w x^i y \in L$

Solution de l'exercice 4

Commençons par formaliser le P.L. : **Prenons maintenant la contraposée** :

L est CFL \Rightarrow

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$

$\neg(z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\Rightarrow \vee$

$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy$

$|vx| \geq 1$

$\wedge |vwx| \leq n$

$\wedge \forall i \geq 0 : uv^i w x^i y \in L)$

$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$

$(z \in L \wedge |z| \geq n)$

\wedge

$(\forall uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy$

$|vx| < 1$

$\vee |vwx| > n$

$\vee \exists i \geq 0 : uv^i w x^i y \notin L)$

$\Rightarrow L$ n'est pas CFL

Solution de l'exercice 5

- Supposons que L est un CFL.
- Alors, par le P.L., il existe un entier k , tel que :
si $n^2 \geq k$, alors $a^{n^2} = uvwxy$, respectant les conditions du P.L.
- Observons le cas où $n = k$ (on considère le mot $z = a^{k^2}$). Clairement $k^2 > k$.
- Donc uv^2wx^2y est dans L ...

Solution de l'exercice 5

$$\begin{aligned}k^2 &= |z| \\ &= |uvwxy| \\ &< |uv^2wx^2y| \\ &\leq k^2 + k \\ &< k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2\end{aligned}$$

Donc $|uv^2wx^2y|$ n'est pas un carré parfait et ne peut donc pas appartenir à L !