Pumping Lemma

INFO010 – Théorie des langages – Partie pratique

S. Collette G. Geeraerts

Sciences – Informatique

Pumping Lemma – langages réguliers

Si

L est un langage régulier

alors

$\exists n$ tel que $\forall z \in L$ avec $|z| \geq n$, on peut trouver une découpe de z en uvw telle que :

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- $\forall i \geq 0 \; uv^iw \in L$

Utilité du *Pumping Lemma*

On se sert de ce lemme pour montrer qu'un langage n'est pas régulier.

Par exemple : Supposons que $L = \{0^k 1^k | k \in \mathbb{N}\}$ est régulier.

- Par le P.L., il existe n, qui nous permet de découper chaque mot de L de longueur supérieure à n, tel que les propriétés du P.L. restent valides.
- Considérons $0^n 1^n$ dont la longueur est bien supérieure à n.

Utilité du *Pumping Lemma* – 2

- Donc il existe $xyz = 0^n 1^n$ et $|xy| \leq n$.
- y ne peut donc contenir que des 0 (au moins 1).
- Considérons xy^0z. D'après le P.L il appartient à L. . .
- . . .mais il contient au moins un 1 de plus que de 0.
- Contradiction : L n'est donc pas régulier.

Exercices

1 Donnez, de manière formelle, la contraposée du *Pumping Lemma* pour les langages réguliers.

2 Le langage $L = \{1^n | \exists m \in \mathbb{N} : \ n = m^2\}$ est-il régulier ? Prouvez votre réponse

3 Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$, on dénote par w^M l'image miroir de ce mot. On définit alors le langage $L_p = \{ww^M | w \in \Sigma^*\}$, qui contient donc tous les palindromes. Par exemple :

Élu par cette crapule

Étant donné l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, L_p est-il régulier ? Prouvez votre réponse.

Solution de l'exercice 1

Commençons par formaliser le P.L. :

L est régulier $\Rightarrow$

$$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$$

$$(z \in L \wedge |z| \geq n)$$

$$\Rightarrow$$

$$(\exists uvw \in \Sigma^* : z = uvw$$

$$|uv| \leq n$$

$$\wedge |v| \geq 1$$

$$\wedge \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$$

Solution de l'exercice 1

Commençons par formaliser le P.L. :

L est régulier $\Rightarrow$

$$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$$

$$\neg \; (z \in L \wedge |z| \geq n)$$

$$\vee$$

$$(\exists uvw \in \Sigma^* : \; z = uvw$$

$$|uv| \leq n$$

$$\wedge \; |v| \geq 1$$

$$\wedge \; \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$$

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$ $\qquad\qquad$ $\forall n : \exists z \in \Sigma^*$

$\neg \; (z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\vee$

$(\exists uvw \in \Sigma^* : \; z = uvw$

$|uv| \leq n$

$\wedge \; |v| \geq 1$

$\wedge \; \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$\exists n : \; \forall z \in \Sigma^* :$ $\qquad\qquad$ $\forall n : \; \exists z \in \Sigma^*$

$\neg \; (z \in L \wedge |z| \geq n)$ $\qquad\qquad$ $(z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\vee$

$(\exists uvw \in \Sigma^* : \; z = uvw$

$|uv| \leq n$

$\wedge \; |v| \geq 1$

$\wedge \; \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$ $\quad$ $\forall n : \exists z \in \Sigma^*$

$\neg\ (z \in L \wedge |z| \geq n)$ $\quad$ $(z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\vee$ $\quad$ $\wedge$

$(\exists uvw \in \Sigma^* : z = uvw$

$|uv| \leq n$

$\wedge\ |v| \geq 1$

$\wedge\ \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$\exists n: \forall z \in \Sigma^*:$	$\forall n: \exists z \in \Sigma^*$
$\neg\ (z \in L \wedge \|z\| \geq n)$	$(z \in L \wedge \|z\| \geq n)$
$\vee$	$\wedge$
$(\exists uvw \in \Sigma^*: z = uvw$	$(\forall uvw \in \Sigma^*: z = uvw$
$\|uv\| \leq n$	
$\wedge\ \|v\| \geq 1$	
$\wedge\ \forall i \geq 0: uv^i w \in L)$	

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$$

$$\neg \quad (z \in L \wedge |z| \geq n)$$

$$\vee$$

$$(\exists uvw \in \Sigma^* : \; z = uvw$$

$$|uv| \leq n$$

$$\wedge\ |v| \geq 1$$

$$\wedge\ \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$$

$$\forall n : \; \exists z \in \Sigma^*$$

$$(z \in L \wedge |z| \geq n)$$

$$\wedge$$

$$(\forall uvw \in \Sigma^* : \; z = uvw$$

$$|uv| > n$$

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$	$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$
$\neg \quad (z \in L \wedge \|z\| \geq n)$	$(z \in L \wedge \|z\| \geq n)$
$\vee$	$\wedge$
$(\exists uvw \in \Sigma^* : \; z = uvw$	$(\forall uvw \in \Sigma^* : \; z = uvw$
$\|uv\| \leq n$	$\|uv\| > n$
$\wedge \; \|v\| \geq 1$	$\vee \; \|v\| < 1$
$\wedge \; \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$	

Sciences – Informatique

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$	$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$
$\neg \ (z \in L \wedge \lvert z\rvert \geq n)$	$(z \in L \wedge \lvert z\rvert \geq n)$
$\vee$	$\wedge$
$(\exists uvw \in \Sigma^* : \ z = uvw$	$(\forall uvw \in \Sigma^* : \ z = uvw$
$\lvert uv\rvert \leq n$	$\lvert uv\rvert > n$
$\wedge \ \lvert v\rvert \geq 1$	$\vee \ \lvert v\rvert < 1$
$\wedge \ \forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$	$\vee \ \exists i \geq 0 : uv^i w \notin L)$

Solution de l'exercice 1

Prenons maintenant la contraposée :

L est régulier $\Rightarrow$

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$	$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$
$\neg \ (z \in L \wedge \lvert z\rvert \geq n)$	$(z \in L \wedge \lvert z\rvert \geq n)$
$\vee$	$\wedge$
$(\exists uvw \in \Sigma^* : z = uvw$	$(\forall uvw \in \Sigma^* : z = uvw$
$\lvert uv\rvert \leq n$	$\lvert uv\rvert > n$
$\wedge \lvert v\rvert \geq 1$	$\vee \lvert v\rvert < 1$
$\wedge \forall i \geq 0 : uv^iw \in L)$	$\vee \exists i \geq 0 : uv^iw \notin L)$
	$\Rightarrow L$ n'est pas régulier

Solution de l'exercice 2

- Supposons que L est régulier.
- Il existe donc un n qui nous permet de découper les mots de L selon les conditions du P.L.
- Considérons le mot $w = 1^{n^2}$. Clairement, $|w| \geq n$.
- On peut donc découper w en xyz.
- Selon le P.L., $xyyz \in L$, ce qui implique que $|xyyz|$ est un carré parfait.
- Oui, mais...

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned} n^2 &= |w| \\ &= |xyz| \\ &< |xyyz| \\ &\leq n^2 + n \\ &< n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Donc : $n^2 < |xyyz| < (n+1)^2$ et donc $|xyyz|$ n'est pas un carré et $xyyz \notin L$...

Solution de l'exercice 3

- Supposons que L_p est régulier.
- Il existe donc $n\dots$
- Considérons $w = 0^n110^n \in L_p$; clairement $|w| > n$.
- Selon le P.L., il existe donc une découpe $w = xyz$ telle que $|xy| \leq n$.
- Donc y ne peut contenir que des 0 (au moins un).
- D'après le P.L., $xz = 0^m110^n \in L_p$ (avec $m < n$).

Solution de l'exercice 3

- Or ce mot contient moins de 0 à gauche qu'à droite...
- ...Il n'appartient donc pas à L !

C.Q.F.D.

Exercice supplémentaire

Soit w un mot sur l'alphabet Σ. Pour tout $c \in \Sigma$, nous notons $|w|_c$ pour représenter le nombre de c qui apparaissent dans w.

Le langage de Dyck est le langage de tous les mots $w_1 \cdots w_n$ sur $\Sigma = \{(,)\}$ tels que :

$$|w|_) = |w|_($$

$$\wedge$$

$$\forall 1 \leq i \leq n : w_i =) \Rightarrow |w_1 \cdots w_{i-1}|_(> |w_1 \cdots w_{i-1}|_)$$

Ce langage est-il régulier ? Démontrez.

Exercice supplémentaire – Correction

- Supposons que ce langage est régulier.
- Donc il existe une constante n telle que, pour tout mot z du langage avec $|z| \geq n$, le PL est vérifié.
- Cela doit donc être vrai pour :

$$z = \underbrace{((\cdots(}_{n}\underbrace{))\cdots)}_{n}$$

Exercice supplémentaire – Correction

- Donc pour toute découpe de z en uvw telle que $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$, les mots de la forme $uv^i w$ devraient être dans le langage.
- Mais si $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$, alors v ne contient que des (.
- Donc, le mot $uv^0 w = uv$ est le mot

$$\underbrace{((\cdots(}_{n-|v|<n}\underbrace{))\cdots)}_{n}$$

  et ce mot n'est clairement pas dans le langage.
- Contradiction : ce langage n'est pas régulier.

Pumping Lemma – **langages** *Context-Free*

Si

L est un langage *context-free*

alors

$\exists n$ tel que, si $z \in L$ et $|z| \geq n$, alors on peut découper z en $uvwxy$ tel que :

- $|vwx| \leq n$
- $vx \neq \varepsilon$
- $\forall i \geq 0 \; uv^iwx^iy \in L$

Exercices

4 Donnez, de manière formelle, la contraposée du *Pumping Lemma* pour les langages *Context Free*.

5 Montrez que $L = \{a^{n^2} | n \geq 1\}$ n'est pas un CFL.

Solution de l'exercice 4

Commençons par formaliser le P.L. :

$$L \text{ est CFL} \Rightarrow$$
$$\exists n : \ \forall z \in \Sigma^* :$$
$$(z \in L \wedge |z| \geq n)$$
$$\Rightarrow$$
$$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : \ z = uvwxy$$
$$|vx| \geq 1$$
$$\wedge \ |vwx| \leq n$$
$$\wedge \ \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L)$$

Solution de l'exercice 4

Commençons par formaliser le P.L. :

$$L \text{ est CFL} \Rightarrow$$

$$\exists n : \ \forall z \in \Sigma^* :$$

$$\neg \left(z \in L \wedge |z| \geq n\right)$$

$$\vee$$

$$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : \ z = uvwxy$$

$$|vx| \geq 1$$

$$\wedge \ |vwx| \leq n$$

$$\wedge \ \forall i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L)$$

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$$\exists n : \ \forall z \in \Sigma^* :$$

$$\neg \, (z \in L \wedge |z| \geq n)$$

$$\vee$$

$$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : \ z = uvwxy$$

$$|vx| \geq 1$$

$$\wedge \ |vwx| \leq n$$

$$\wedge \ \forall i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L)$$

$$\forall n : \ \exists z \in \Sigma^*$$

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$$\exists n:\ \forall z \in \Sigma^*:$$

$$\neg\,(z \in L \wedge |z| \geq n)$$

$$\vee$$

$$(\exists uvwxy \in \Sigma^*:\ z = uvwxy$$

$$|vx| \geq 1$$

$$\wedge\ |vwx| \leq n$$

$$\wedge\ \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L)$$

$$\forall n:\ \exists z \in \Sigma^*$$

$$(z \in L \wedge |z| \geq n)$$

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$\exists n : \ \forall z \in \Sigma^* :$

$\neg \ (z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\vee$

$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : \ z = uvwxy$

$|vx| \geq 1$

$\wedge \ |vwx| \leq n$

$\wedge \ \forall i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L)$

$\forall n : \ \exists z \in \Sigma^*$

$(z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\wedge$

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$

$\neg \, (z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\vee$

$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : \; z = uvwxy$

$|vx| \geq 1$

$\wedge \, |vwx| \leq n$

$\wedge \, \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L)$

$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$

$(z \in L \wedge |z| \geq n)$

$\wedge$

$(\forall uvwxy \in \Sigma^* : \; z = uvwxy$

Sciences – Informatique

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$\exists n : \ \forall z \in \Sigma^* :$	$\forall n : \ \exists z \in \Sigma^*$
$\neg \left(z \in L \wedge \lvert z \rvert \geq n\right)$	$\left(z \in L \wedge \lvert z \rvert \geq n\right)$
$\vee$	$\wedge$
$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : \ z = uvwxy$	$(\forall uvwxy \in \Sigma^* : \ z = uvwxy$
$\lvert vx \rvert \geq 1$	$\lvert vx \rvert < 1$
$\wedge \ \lvert vwx \rvert \leq n$	
$\wedge \ \forall i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L)$	

Sciences – Informatique

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$	$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$
$\neg\ (z \in L \wedge \|z\| \geq n)$	$(z \in L \wedge \|z\| \geq n)$
$\vee$	$\wedge$
$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy$	$(\forall uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy$
$\|vx\| \geq 1$	$\|vx\| < 1$
$\wedge\ \|vwx\| \leq n$	$\vee\ \|vwx\| > n$
$\wedge\ \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L)$	

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$$\exists n: \ \forall z \in \Sigma^*: \qquad \forall n: \ \exists z \in \Sigma^*$$

$$\neg\,(z \in L \wedge |z| \geq n) \qquad (z \in L \wedge |z| \geq n)$$

$$\vee \qquad \wedge$$

$$(\exists uvwxy \in \Sigma^*: \ z = uvwxy \qquad (\forall uvwxy \in \Sigma^*: \ z = uvwxy$$

$$|vx| \geq 1 \qquad |vx| < 1$$

$$\wedge\ |vwx| \leq n \qquad \vee\ |vwx| > n$$

$$\wedge\ \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L) \qquad \vee\ \exists i \geq 0 : uv^iwx^iy \notin L)$$

Solution de l'exercice 4

Prenons maintenant la contraposée :

L est CFL $\Rightarrow$

$$\exists n : \forall z \in \Sigma^* :$$

$$\neg \left(z \in L \wedge |z| \geq n\right)$$

$$\vee$$

$$(\exists uvwxy \in \Sigma^* : \; z = uvwxy$$

$$|vx| \geq 1$$

$$\wedge \; |vwx| \leq n$$

$$\wedge \; \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L)$$

$$\forall n : \exists z \in \Sigma^*$$

$$\left(z \in L \wedge |z| \geq n\right)$$

$$\wedge$$

$$(\forall uvwxy \in \Sigma^* : \; z = uvwxy$$

$$|vx| < 1$$

$$\vee \; |vwx| > n$$

$$\vee \; \exists i \geq 0 : uv^iwx^iy \notin L)$$

$\Rightarrow$ L n'est pas CFL

Solution de l'exercice 5

- Supposons que L est un CFL.
- Alors, par le P.L., il existe un entier k, tel que : si $n^2 \geq k$, alors $a^{n^2} = uvwxy$, respectant les conditions du P.L.
- Observons le cas où $n = k$ (on considère le mot $z = a^{k^2}$). Clairement $k^2 > k$.
- Donc uv^2wx^2y est dans L...

Solution de l'exercice 5

$$
\begin{aligned}
k^2 &= |z| \\
&= |uvwxy| \\
&< |uv^2wx^2y| \\
&\leq k^2 + k \\
&< k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

Donc $|uv^2wx^2y|$ n'est pas un carré parfait et ne peut donc pas appartenir à L !