

•
•
•

INFO 010 – Théorie des langages – Partie pratique

Introduction aux grammaires

Sébastien COLLETTE et Gilles GEERAERTS



Définition

Une grammaire est un quadruplet

$G = \langle V, T, P, S \rangle$ où

- V est l'ensemble des **variables** ;
- T est l'ensemble des **terminaux** ;
- P est l'ensemble des **règles de production**.
 $P \subseteq (V \cup T)^* V (V \cup T)^* \times (V \cup T)^*$;
- $S \in V$ est le **symbole de départ**.

Exemple

Soit une grammaire \mathcal{G} dont les règles de P sont :

$$S \rightarrow aSbS$$

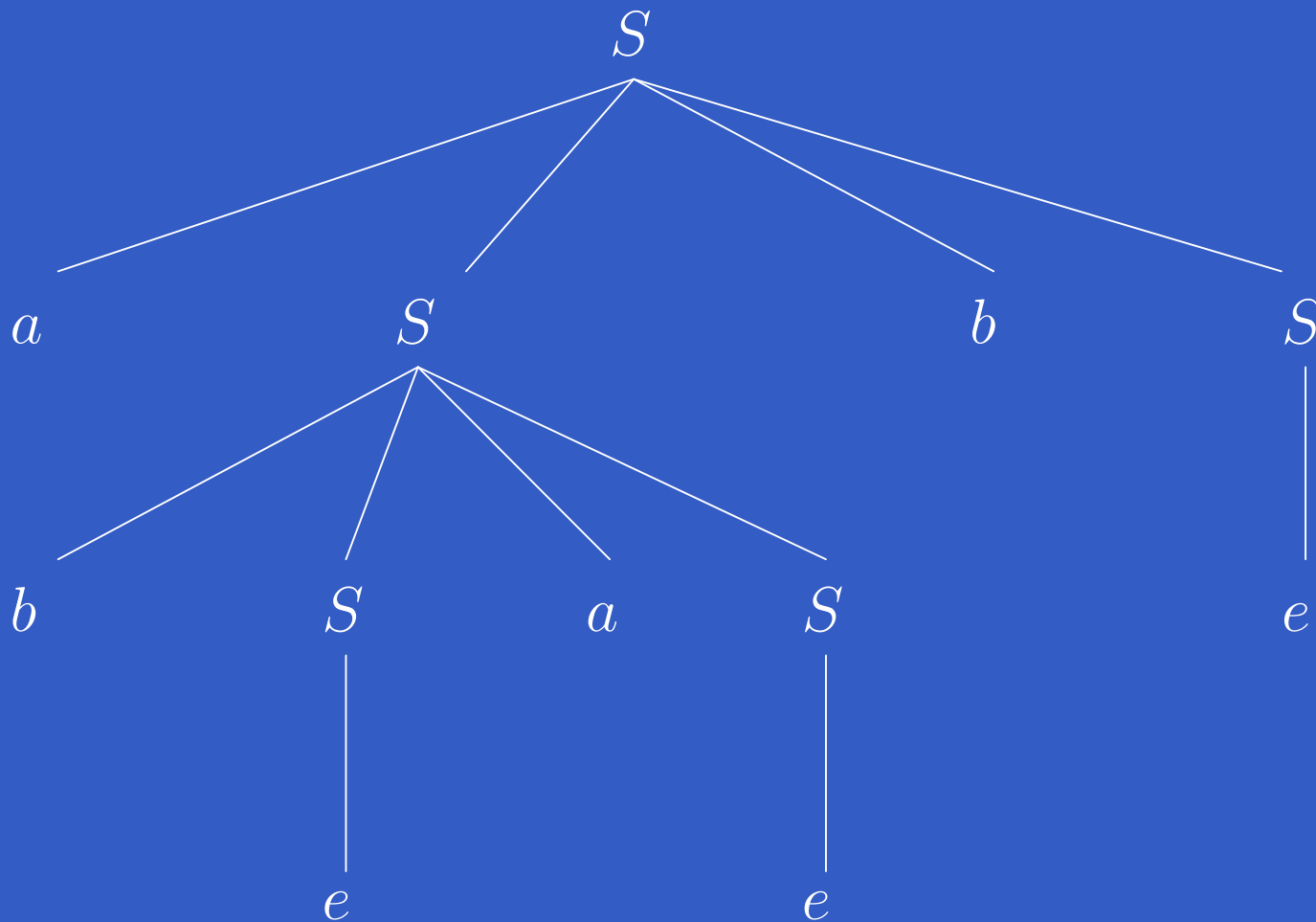
$$bSaS$$

e

S est la seule variable (ou symbole non-terminal) ;
il est aussi le symbole de départ. On a $T = \{a, b, e\}$.

Arbre de dérivation

Pour le *string* $abeaebe$, selon \mathcal{G} :



Hiérarchie de Chomsky

Classe 0 : Grammaires non restreintes

Pas de restrictions sur la forme des règles

Hiérarchie de Chomsky – suite

Classe 1 : Grammaires *context sensitive* Toute règle dans P est de la forme :

$$\alpha \rightarrow \beta$$

avec $|\alpha| \leq |\beta|$. Il peut en outre y avoir une règle de la forme :

$$S \rightarrow \varepsilon$$

où S est le symbole de départ, et à condition que S n'apparaisse pas dans une partie droite.

Hiérarchie de Chomsky – suite

Définition alternative des grammaires CS

Toute règle dans P est de la forme :

$$\alpha A \gamma \rightarrow \alpha \beta \gamma$$

avec $\beta \in (V \cup T)^+$. Ou bien de la forme :

$$S \rightarrow \varepsilon$$

et S n'apparaît dans aucun membre de droite.

Hiérarchie de Chomsky – suite

Classe 2 : Grammaires *context free* Toute règle est de la forme :

$$A \rightarrow \alpha$$

Classe 3 : Grammaires régulières 2 classes :

Grammaire linéaires droites règles du type :

$$A \rightarrow wB \text{ ou } A \rightarrow w$$

Grammaires linéaires gauches règles du type :

$$A \rightarrow Bw \text{ ou } A \rightarrow w$$

Exercice 1

Décrivez, en **français**, les langages générés par les grammaires suivantes, et donnez leur type :

(a)

$$\begin{array}{l} S \rightarrow abcA \\ \quad \quad Aabc \\ A \rightarrow \varepsilon \\ Aa \rightarrow Sa \\ cA \rightarrow cS \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{l} S \rightarrow 0 \\ \quad \quad 1 \\ \quad \quad 1S \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{l} S \rightarrow a \\ \quad \quad *SS \\ \quad \quad +SS \end{array}$$

Exercice 2

Soit la grammaire \mathcal{G} suivante :

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow Aa$$

$$bB$$

$$B \rightarrow a$$

$$Sb$$

- Cette grammaire est-elle régulière ?
- Donnez :
 - l'arbre de dérivation pour $baabaab$, $bBABb$ et $baSb$
 - les dérivations gauche et droite de $baabaab$.

Exercices 3 & 4

- Écrivez une grammaire *context-free* qui génère toutes les chaînes de a et de b (dans n'importe quel ordre), tel qu'il y a plus de a que de b . Testez votre grammaire sur $baaba$ en en donnant une dérivation.
- Écrivez une grammaire *context-sensitive* qui génère toutes les chaînes de a , de b et de c (quel que soit l'ordre), ayant le même nombre de a , de b et de c . Donnez la dérivation de $cacbab$ selon votre grammaire.

Solution de l'exercice 1

1. Grammaire non restreinte donnant toutes les suites de abc .
2. Grammaire linéaire droite donnant toutes les suites de 1 éventuellement terminées par un 0, ou bien le *string* 0.
3. Grammaire context free donnant toutes les expressions arithmétiques utilisant la somme et le produit sur la variable a , et ce, en notation polonaise.

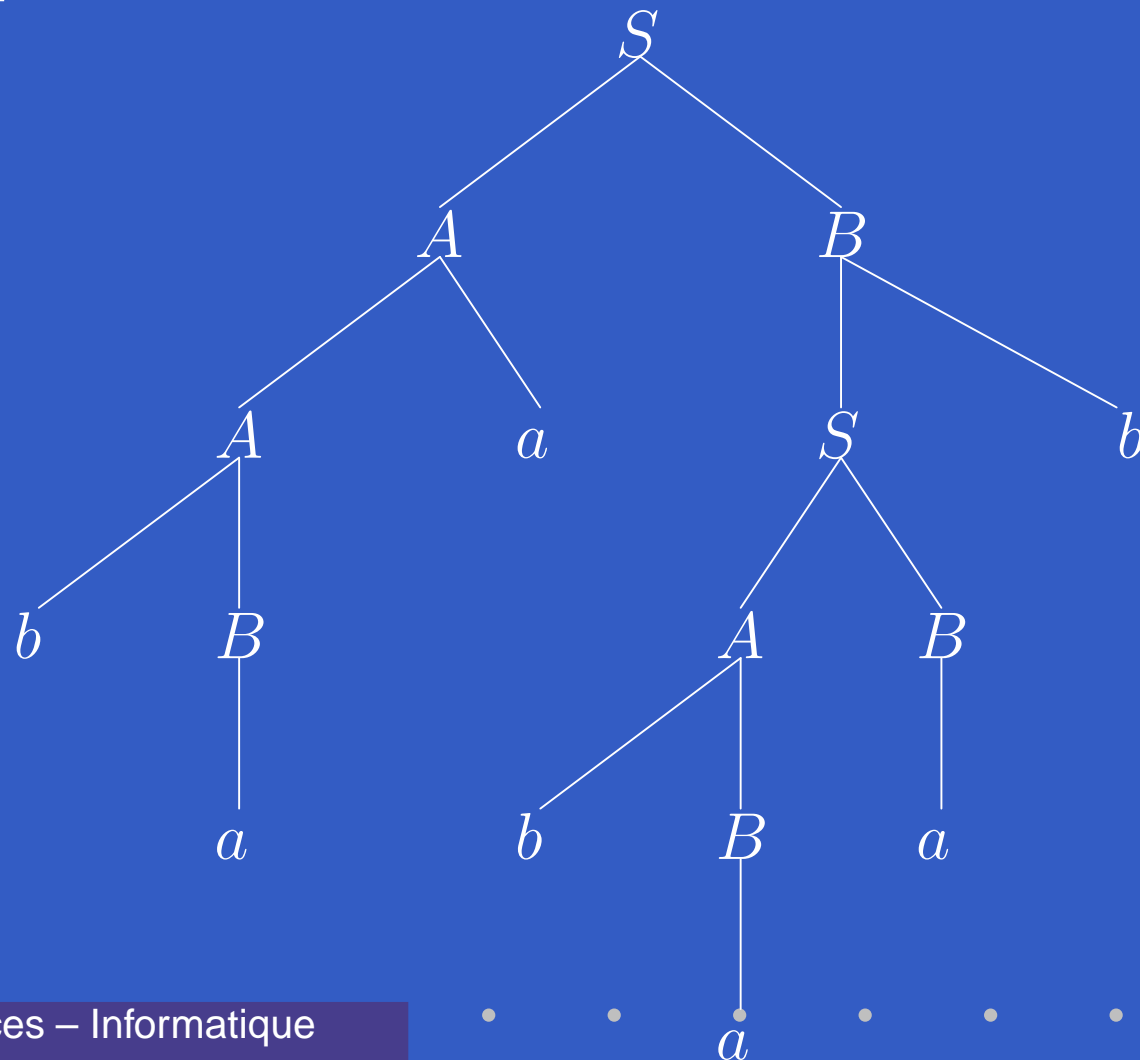
Solution de l'exercice 2

Il s'agit d'une grammaire context free mais **pas régulière**.

Justification : il ne peut y avoir à la fois une règle de la forme $A \rightarrow \alpha B$ et une règle de la forme $A \rightarrow B\alpha$ dans une grammaire régulière.

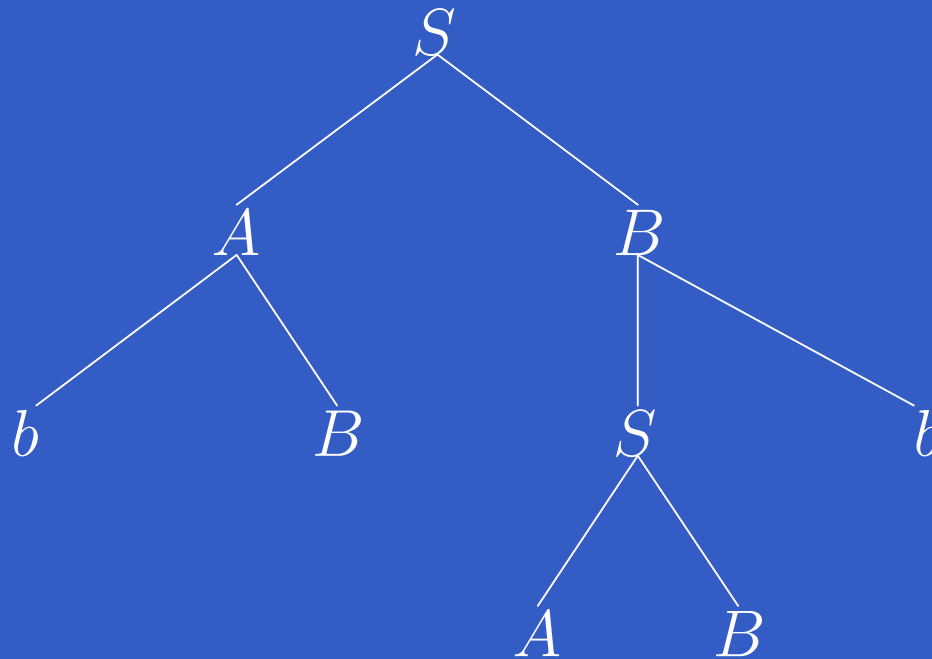
Solution de l'exercice 2 – suite

baabaab :



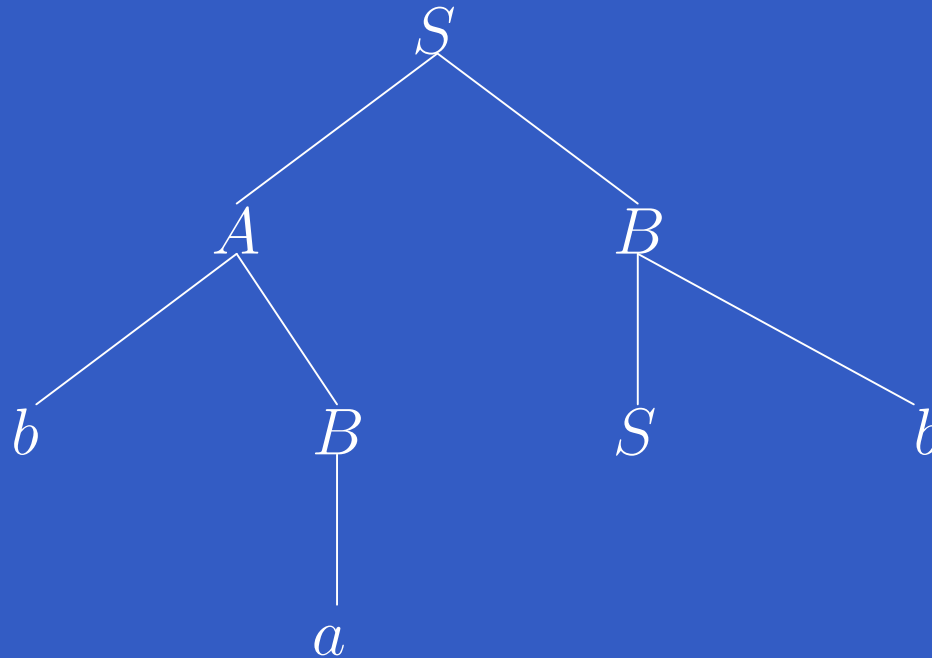
Solution de l'exercice 2 – suite

$bBABb$:



Solution de l'exercice 2 – suite

$baSb$:



Solution de l'exercice 2 – suite

La dérivation **gauche** de *baabaab* est :

$S \Rightarrow AB \Rightarrow AaB \Rightarrow bBaB \Rightarrow baaB \Rightarrow baaSb \Rightarrow$
 $baaABb \Rightarrow baabBBb \Rightarrow baabaBb \Rightarrow baabaab$

La dérivation **droite** est : $S \Rightarrow AB \Rightarrow ASb \Rightarrow$
 $AABb \Rightarrow AAab \Rightarrow AbBab \Rightarrow Abaab \Rightarrow Aabaab \Rightarrow$
 $bBabaab \Rightarrow baabaab$

Solution de l'exercice 3

$$S \rightarrow bSa|aSb|abS|baS|Sab|Sba|Sa|aS|a$$

On dérive *baaba* de la façon suivante :

$$S \Rightarrow baS \Rightarrow baabS \Rightarrow baaba$$

Solution de l'exercice 4

$$\begin{array}{l|l} S \rightarrow S' \mid \varepsilon & CA \rightarrow AC \\ S' \rightarrow ABCS \mid ABC & CB \rightarrow BC \\ AB \rightarrow BA & A \rightarrow a \\ AC \rightarrow CA & B \rightarrow b \\ BA \rightarrow AB & C \rightarrow c \\ BC \rightarrow CB & \end{array}$$

$S \Rightarrow ABCS \Rightarrow ABCABCS \Rightarrow ABCABC \Rightarrow ACBABC \Rightarrow$
 $CABABC \Rightarrow CABACB \Rightarrow CAB CAB \Rightarrow CACBAB \Rightarrow$
 $cACBAB \Rightarrow caCBAB \Rightarrow cacBAB \Rightarrow cacbAB \Rightarrow cacbaB \Rightarrow$
 $cacbab$