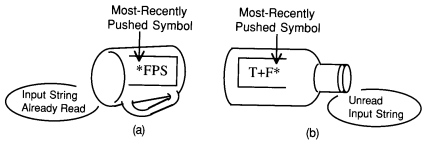
Les analyeurs LR(k) ($k = 0, 1, \ldots$)



INFO010 – Théorie des langages – Partie pratique

Sébastien COLLETTE et Gilles GEERAERTS

Introduction

- Principe de l'analyseur LR : réduire une série de terminaux et de non-terminaux préalablement *pushés* sur le *stack* en un non-terminal.
  - En quelque sorte, on suit les règles « à l'envers ».
  - La partie droite d'une règle qui servira à la réduction est appelée *handle*.

Exemple

$S' \rightarrow S\$$
$S \rightarrow Saa$
$S \rightarrow a$
$S \rightarrow \varepsilon$

Pile	Entrée	Action	Sortie
$\perp$	$aa\$$	R_3	
$\perp S$	$aa\$$	S	3
$\perp Sa$	$a\$$	S	3
$\perp Saa$	$\$$	R_1	3
$\perp S$	$\$$	S	31
$\perp S\$$	ε	Accept	31

On voit que le choix des actions n'est pas trivial. . .

Grammaire LR(k)

Définition : Soit une grammaire $G = (V, T, P, S)$. Prenons-en la version augmentée : $G' = (V', T, P', S')$. On dit que G est LR(k) pour $k \geq 0$ si les trois conditions :

1. $S' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} \alpha A w \Rightarrow_{G'} \alpha\beta w$,
2. $S' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} \gamma B x \Rightarrow_{G'} \alpha\beta y$,
3. $\text{First}^k(w) = \text{First}^k(y)$

impliquent que : $\alpha A y = \gamma B x$ (c'est-à-dire $\alpha = \gamma$, $A = B$ et $y = x$).

Construction de l'analyseur LR(0)

- On va construire un automate canonique qui reflète les décisions prises par l'analyseur ;
- Chaque état contient plusieurs *items* : des règles dans lesquelles on a introduit des • qui symbolisent l'avancement de l'analyseur ;
  - Une partie de ces *items* constitue le noyau ;
  - Les autres sont obtenues par fermeture ;
- Cet automate permettra de construire les tables utilisées par l'analyseur.

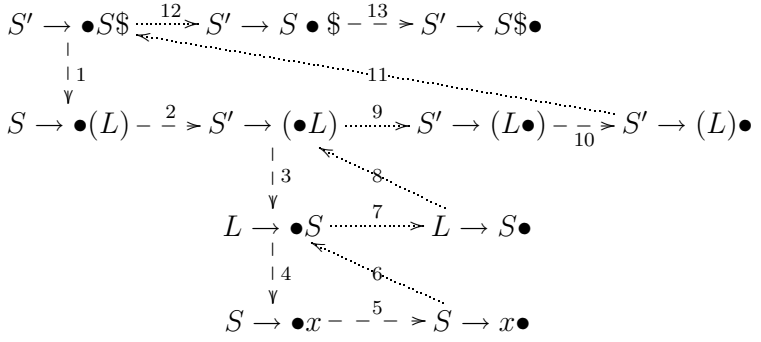
Exemple – 1

Soit la Grammaire :

$$
\begin{array}{ll}
(0) & S' \rightarrow S\$ \\
(1) & S \rightarrow (L) \\
(2) & S \rightarrow x \\
(3) & L \rightarrow S \\
(4) & L \rightarrow L, S
\end{array}
$$

Extrait de : *Modern compiler implementation in Java*, A. W. Appel

Exemple – 2 : Reconnaître $(x)\ldots$



Le • représente l'état d'avancement de l'analyseur.

Exemple – 2

$S' \rightarrow \bullet S\$$
$S \rightarrow \bullet(L)$
$S \rightarrow \bullet x$

Le • représente l'état d'avanceme de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut déri ver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Exemple – 2

$S' \to \bullet S\$$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Le $\bullet$ représente l'état d'avancement de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Exemple – 2

$S' \to \bullet S\$$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Le $\bullet$ représente l'état d'avancement de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Sciences – Informatique
INFO010 – Les analyseurs LR(k) – p.8/40

Exemple – 2

$S' \to \bullet S\$$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Noyau

Le $\bullet$ représente l'état d'avancement de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Exemple – 2

$S' \to \bullet S\$$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Noyau

Le $\bullet$ représente l'état d'avancement de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Sciences – Informatique
INFO010 – Les analyseurs LR(k) – p.8/40

Exemple – 2

$S' \to \bullet S\$$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Fermeture

Le $\bullet$ représente l'état d'avancement de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Exemple – 2

$S' \to \bullet S\$$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Fermeture

Le $\bullet$ représente l'état d'avancement de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Sciences – Informatique
INFO010 – Les analyseurs LR(k) – p.8/40

Exemple – 2

$S' \to \bullet S\$$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

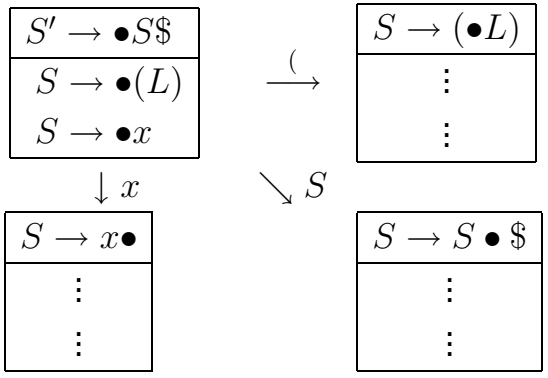
Fermeture

Le $\bullet$ représente l'état d'avancement de l'analyseur.

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de S'
- Il faut donc avaler $S\$\ldots$
- Mais S n'est pas un terminal !
- Reconnaître S revient à avaler un $($ ou un x.

Exemple – 3

Transitions



Exemple – 4

$S \to (\bullet L)$
$L \to \bullet S$
$L \to \bullet L, S$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Noyau

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de L
- Il faut donc avaler L ou $S\$\ldots$
- On refait donc une étape de fermeture !

Exemple – 4

$S \to (\bullet L)$
$L \to \bullet S$
$L \to \bullet L, S$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Fermeture (1)

- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de L
- Il faut donc avaler L ou $S\$\ldots$
- On refait donc une étape de fermeture !

Exemple – 4

$S \to (\bullet L)$
$L \to \bullet S$
$L \to \bullet L, S$
$S \to \bullet(L)$
$S \to \bullet x$

Fermeture (2)

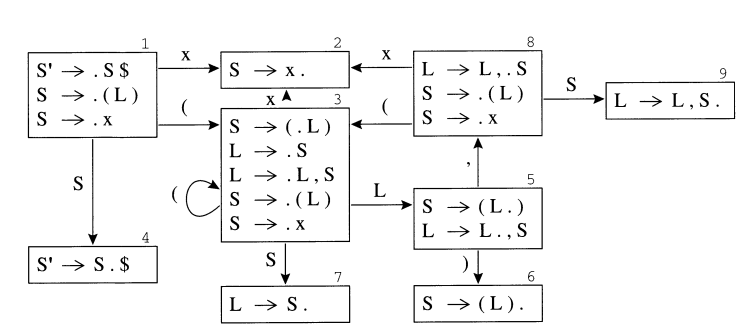
- On veut reconnaître un mot que l'on peut dériver de L
- Il faut donc avaler L ou $S\$\ldots$
- On refait donc une étape de fermeture !

Exemple – 5

$S \to x\bullet$

- Dans ce cas-ci, il n'y a rien à rajouter pour la fermeture !
- On a donc reconnu $S\ldots$
- L'analyseur devra faire un *Reduce*.

Exemple – 6



Exemple – 7

État	Action
1	Shift
2	Reduce
3	Shift
4	Accept
5	Shift

État	Action
6	Reduce
7	Reduce
8	Shift
9	Reduce

Analyseur LR(0) – CFSM – 1

`Fermeture(`I`)` **begin**

  répéter

    $I' \leftarrow I$;

    pour chaque *item* $[A \rightarrow \alpha \bullet B\beta] \in I, B \rightarrow \gamma \in G'$ **faire**

      $I \leftarrow I \cup [B \rightarrow \bullet\gamma]$;

  jusqu'à $I' = I$;

  `return(`I`)` ;

end

`Transition(`I`,`X`)` **begin**

  `return(Fermeture(`$\{[A \rightarrow \alpha X \bullet \beta] \mid [A \rightarrow \alpha \bullet X\beta] \in I\}$`))` ;

end

Analyseur LR(0) – CFSM – 2

`Items(`G'`)` **begin**

  $C \leftarrow$`Fermeture(`$\{[S' \rightarrow \bullet S]\}$`)` ;

  répéter

    $C' \leftarrow C$;

    pour chaque $I \in C, X \in T' \cup V'$ **faire**

      $C' \leftarrow C' \cup$ `Transition(`I`,`X`)` ;

  jusqu'à $C' = C$;

end

Analyseur LR(0) – Table des actions

On construit la tables des actions comme suit :

pour chaque *état* s *du CFSM* **faire**

  si s *contient* $A \rightarrow \alpha \bullet a\beta$ **alors**

    $\text{Action}[s] \leftarrow \text{Action}[s] \cup \text{Shift}$;

  sinon si s *contient* $A \rightarrow \alpha\bullet$, *qui est la règle* i **alors**

    $\text{Action}[s] \leftarrow \text{Action}[s] \cup \text{Reduce}_i$;

  sinon si s *contient* $S' \rightarrow S\$\bullet$ **alors**

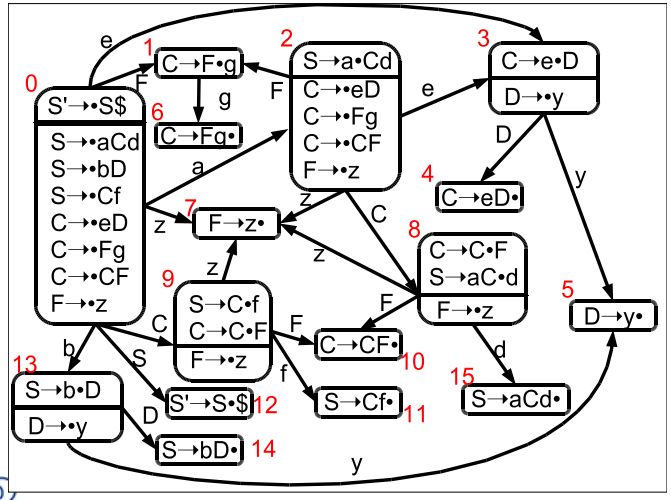
    $\text{Action}[s] \leftarrow \text{Action}[s] \cup \text{Accept}$;

Exercice 1

(0) $S' \rightarrow S\$$
(1) $S \rightarrow aCd$
(2) $S \rightarrow bD$
(3) $S \rightarrow Cf$
(4) $C \rightarrow eD$
(5) $C \rightarrow Fg$
(6) $C \rightarrow CF$
(7) $F \rightarrow z$
(8) $D \rightarrow y$

- Construisez l'automate canonique, et la table des actions.

Exercice 1 – Solution



Exercice 1 – Solution

État	Action	État	Action
0	Shift	8	Shift
1	Shift	9	Shift
2	Shift	10	Reduce
3	Shift	11	Reduce
4	Reduce	12	Accept
5	Reduce	13	Shift
6	Reduce	14	Reduce
7	Reduce	15	Reduce

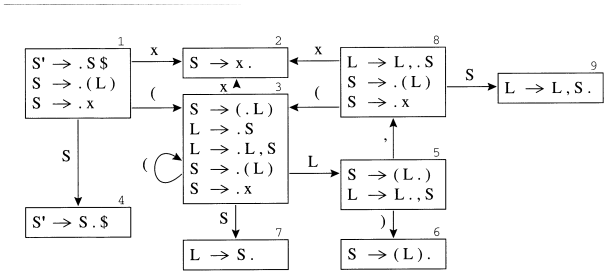
Analyseur LR(0) – Algorithme

- L'analyseur utilise un *stack* sur lequel il *shifte* les symboles ainsi que le numéro d'état courant.
- Cela permet de revenir dans le bon état quand on fait un *reduce*.
- La *string* avalée est acceptée quand on arrive dans l'état final (dont l'action est *Accept*).
- On représente une configuration de l'analyseur par un triplet ⟨stack, input, output⟩.
- Initialement : $\langle \vdash 0, \omega, \varepsilon \perp \rangle$

Analyseur LR(0) – Transitions

begin
  Ayant $\langle \vdash \gamma s, ax, y \perp \rangle$:
  si $\mathrm{Action}[s] = \mathrm{Shift}$ **alors**
    on va en $\langle \vdash \gamma s a \mathrm{Successeur}[s, a], x, y \perp \rangle$;
  sinon si $\mathrm{Action}[s] = \mathrm{Reduce}_j$ *par* $A \to \alpha$ **alors**
    Ayant $\langle \vdash \gamma s' x_1 s_1 x_2 s_2 \dots x_n s, x, y \perp \rangle$ et
    $\alpha = x_1 x_2 \dots x_n$, on va en :
    $\langle \vdash \gamma s' A \mathrm{Successeur}[s', A], x, jy \perp \rangle$;
  sinon si $\mathrm{Action}[s] = \mathrm{Accept}$ **alors** `return(`*OK*`)` ;
  sinon `return(`*Error*`)` ;
end

Exemple : reconnaître (x)



Config.: $\left\langle\ 1(3\mathrm{x}2,\quad)\$,\ \right\rangle$ Action: Reduce 2

Exercice 2

- Simulez le fonctionnement de l'analyseur que vous avez construit à l'exercice 1 sur la chaîne aeyzzd.

Exercice 2 – Solution

Pile	Entrée	Actions	Sortie
0	aeyzzd$	Shift	
0a2	eyzzd$	Shift	
0a2e3	yzzd$	Shift	
0a2e3y5	zzd$	Reduce 8	
0a2e3D4	zzd$	Reduce 4	8
0a2C8	zzd$	Shift	8,4
0a2C8z7	zd$	Reduce 7	8,4
0a2C8F10	zd$	Reduce 6	8,4,7
⋮	⋮	⋮	⋮

Exercice 1 – Solution

Pile	Entrée	Actions	Sortie
0a2C8	zd$	Shift	8,4,7,6
0a2C8z7	d$	Reduce 7	8,4,7,6
0a2C8F10	d$	Reduce 6	8,4,7,6,7
0a2C8	d$	Shift	8,4,7,6,7,6
0a2C8d15	$	Reduce 1	8,4,7,6,7,6
0S12	$	Accept	8,4,7,6,7,6,1

LR(k) : Introduction

- Différence par rapport à LR(0) : on doit maintenant tenir compte de la prévision !
- Par exemple :
  - Considérons un état du CFSM qui contient $A \to \alpha_1 \bullet \alpha_2$ et $B \to \gamma\bullet$
  - On a un conflit *shift – reduce*
  - Si on n'a pas les caractères de $\mathrm{First}^k(\alpha_2)$ sur l'entrée, il ne faut pas essayer le *shift*.
  - Mais dans quel contexte peut-on choisir à coup sûr ?

LR(k) : Introduction – 2

- Il faut retenir un contexte !
- Les *items* des états du CFSM seront maintenant de la forme : $[A \to \alpha_1 \bullet \alpha_2, u]$;
  - u indique le contexte : c'est l'ensemble de chaînes de k caractères qui peuvent suivre les productions de $A \to \alpha_1\alpha_2$
  - On commence avec $[S' \to \bullet S\$,\varepsilon]$
- On adapte donc les algorithmes, la table des actions. . .

Analyseur LR(k) – CFSM – 1

`Fermeture(`I`)` **begin**
  répéter
    $I' \leftarrow I$;
    pour chaque *item* $[A \to \alpha \bullet B\beta,\sigma] \in I, B \to \gamma \in G'$ **faire**
      pour chaque $u \in \mathit{First}^k(\beta\sigma)$ **faire** $I \leftarrow I \cup [B \to \bullet\gamma,u]$;
  jusqu'à $I' = I$;
  `return(`I`)` ;
end

`Transition(`I`,`X`)` **begin**
  `return(Fermeture(`$\{[A \to \alpha X \bullet \beta,u] \mid [A \to \alpha \bullet X\beta,u] \in I\}$`))` ;
end

Analyseur LR(k) – CFSM – 2

On construit la tables des actions comme suit :

pour chaque *état* s *du CFSM* **faire**
  si s *contient* $[A \to \alpha \bullet a\beta,u]$ **alors**
    pour chaque $u \in \mathit{First}^k(a\beta u)$ **faire**
      $\mathrm{Action}[s,u] \leftarrow \mathrm{Action}[s,u] \cup \mathrm{Shift}$;
  sinon si s *contient* $[A \to \alpha\bullet, u\,]$, *qui est la règle* i **alors**
    $\mathrm{Action}[s,u\,] \leftarrow \mathrm{Action}[s,u] \cup \mathrm{Reduce}_i$;
  sinon si s *contient* $[S' \to S\$\bullet,\varepsilon]$ **alors**
    $\mathrm{Action}[s,\cdot] \leftarrow \mathrm{Action}[s,\cdot] \cup \mathrm{Accept}$;

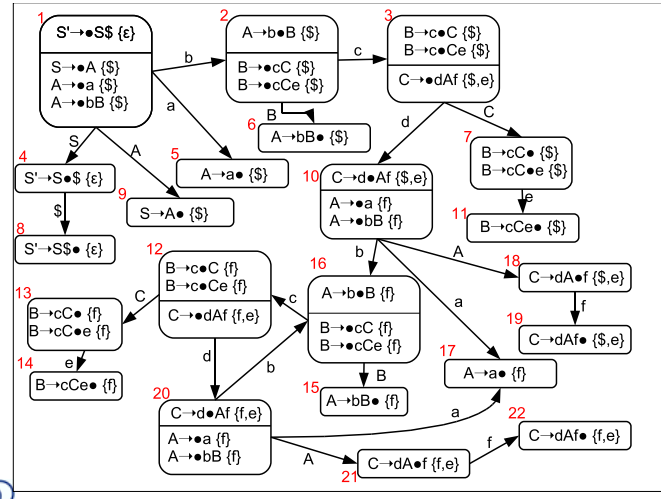
Exercice 3

Construisez l'analyseur LR(1) pour la grammaire :

(1) $S' \rightarrow S\$$
(2) $S \rightarrow A$
(3) $A \rightarrow bB$
(4) $A \rightarrow a$
(5) $B \rightarrow cC$
(6) $B \rightarrow cCe$
(7) $C \rightarrow dAf$

Cette grammaire est-elle LR(0) ? Justifiez.

Exercice 3 – Correction



Exercice 3 – Correction

	a	b	c	d	e	f	$
1	S	S					
2			S				
3				S			
4							S
5							R4
6							R3
7					S		R5
8	Accept						

Exercice 3 – Correction

	a	b	c	d	e	f	$
9							R2
10	S	S					
11							R6
12				S			
13					S	R5	
14						R6	
15						R3	
16			S				

Exercice 3 – Correction

	a	b	c	d	e	f	$
17						R2	
18						S	
19					R7	R7	
20	S	S					
21						S	
22					R7	R7	

Exercice 4

Construisez l'analyseur LR(1) pour la grammaire :

(1) $S' \rightarrow S\$$

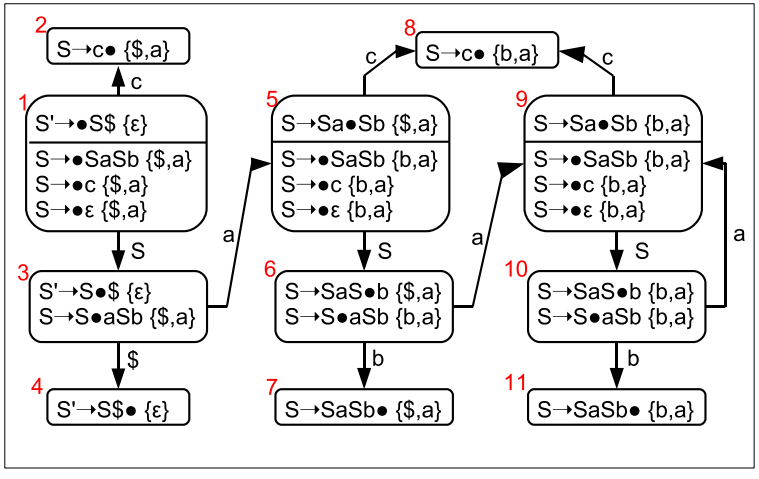
(2) $S \rightarrow SaSb$

(3) $S \rightarrow c$

(4) $S \rightarrow \varepsilon$

Simulez-en le fonctionnement sur abacb.

Exercice 4 – Correction



Exercice 4 – Correction

	a	b	c	$
1	R4		S	R4
2	R3			R3
3	S			S
4	Accept			
5	R4	R4	S	
6	S	S		

Exercice 4 – Correction

	a	b	c	$
7	R2			R2
8	R3	R3		
9	R4	R4	S	
10	S	S		
11	R2	R2		

Exercice 4 – Correction

Stack	Input	Action	Output
1	abacb$	Reduce 4	
1S3	abacb$	Shift	4
1S3a5	bacb$	Reduce 4	4
1S3a5S6	bacb$	Shift	4,4
1S3a5S6b7	acb$	Reduce 2	4,4
1S3	acb$	Shift	4,4,2
1S3a5	cb$	Shift	4,4,2

Exercice 4 – Correction

Stack	Input	Action	Output
1S3a5c8	b$	Reduce 3	4,4,2
1S3a5S6	b$	Shift	4,4,2,3
1S3a5S6b7	$	Reduce 2	4,4,2,3
1S3	$	Shift	4,4,2,3,2
1S3$4		Accept	4,4,2,3,2