Modèles stochastiques II
TP 5 : Tests d'hypothèse
Correction des exercices

8 janvier 2007

1 Exercices

Exercice 1 (test de significativité, pp 19-21 des tests d'hypothèse)

- Soit un échantillon D_N issu d'une variable normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de variance σ^2 connue et de moyenne μ inconnue.
- On veut tester l'hypothèse $H : \mu = \mu_0$ pour une valeur μ_0 connue.
- Soit $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ la moyenne de l'échantillon $\mathbf{D_N}$. Soit la statistique de test $t(\mathbf{D_N}) = |\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mu_0|$. Si $\mu = \mu_0$(donc si H est vraie), alors $\hat{\boldsymbol{\mu}} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2/N)$ (voir TP 3 sur l'estimation).
- Calculer la valeur critique t_α telle que $\mathbf{Pr}[t(\mathbf{D_N}) > t_\alpha | H] = \alpha$ pour $\alpha = 0.1$.
- En déduire la région critique S_0.
- Soit $D_N = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ et $\sigma = 0.1$. Tester l'hypothèse $H : \mu = 10$.

Solution

- Calcul de t_α :
  $\mathbf{Pr}[t(\mathbf{D_N}) > t_\alpha | H] = \alpha$
  $$\begin{aligned}
  &\iff \mathbf{Pr}[|\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mu_0| > t_\alpha | H] = \alpha] \\
  &\iff \mathbf{Pr}[\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mu_0 > t_\alpha \text{ ou } \hat{\boldsymbol{\mu}} - \mu_0 < -t_\alpha | H] = \alpha] \\
  &\iff \mathbf{Pr}[\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2/N) - \mu_0 > t_\alpha \text{ ou } \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2/N) - \mu_0 < -t_\alpha] = \alpha \\
  &\iff 2\mathbf{Pr}[\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2/N) - \mu_0 > t_\alpha] = \alpha \\
  &\iff 2\mathbf{Pr}[\mathcal{N}(0, \sigma^2/N) > t_\alpha] = \alpha \\
  &\iff \mathbf{Pr}[\mathcal{N}(0, \sigma^2/N) > t_\alpha] = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \\
  &\iff \mathbf{Pr}[\mathcal{N}(0,1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} > t_\alpha] = 0.05 \\
  &\iff \mathbf{Pr}[\mathcal{N}(0,1) > \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \cdot t_\alpha] = 0.05 \\
  &\iff \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \cdot t_\alpha = Z_{0.05} = 1.645 \\
  &\iff t_\alpha = 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}
  \end{aligned}$$
- En déduire la région critique S_0 :
  $$S_0 = \{|\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mu_0| > 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$$
- Tester $H : \mu = 10$: nous avons $\hat{\mu} = 12.5$ et $\mu_0 = 10$ et donc
  $$|\hat{\mu} - \mu_0| = 2.5$$
  Nous avons $N = 6$ et $\sigma = 0.1$ et donc
  $$t_\alpha = 1.645 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{6}} = 0.0672$$
  Comme $0.0672 < 2.5$ on rejette l'hypothèse.

Exercice 2 (z-test, p 50 des tests d'hypothèse)

- Soit $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ avec μ inconnu.
- On veut tester $H : \quad \mu = 5$ et $\bar{H} : \quad \mu > 5$ au niveau 0.05.
- Soit $D_N = \{5.1, 5.5, 4.9, 5.3\}$.
- Tester si on doit rejeter l'hypothèse H.

Solution

Nous avons $N = 4$, $\sigma = 1$, $\mu = 5.2$ et $\mu_0 = 5$. Remplaçons ces valeurs dans la statistique de test

$$\mathbf{z} = \frac{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mu_0)\sqrt{N}}{\sigma}$$

Nous obtenons

$$z_N = \frac{(5-5.2)\sqrt{4}}{1} = 0.4$$

Comme $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ on rejette si $z_N > z_\alpha$ où

$$\mathbf{Pr}[\mathcal{N}(0,1) > z_\alpha] = \alpha = 0.05$$

Nous avons $z_{0.05} = 1.645 > z_N$. Nous ne rejetons donc pas l'hypothèse H.

Exercice 3 (t-test, p 55 des tests d'hypothèse)

- Soit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ^2 inconnus.
- Soit $D_N = \{4, 1, 8, -8, 7, 4, 10, -4\}$.
- Tester les hypothèses $H : \quad \mu = 0$, $\bar{H} : \quad \mu \neq 0$ au niveau $\alpha = 0.05$ à la main. Note : pour obtenir $t_{\alpha/2,N-1}$, utilisez la fonction R `qt(alpha/2, N-1, lower.tail=FALSE)`.
- Tester la fonction R *t.test()* avec le vecteur D_N en paramètre. Vérifier que cette fonction renvoie la même valeur pour T que vous avez obtenue à la main. Vérifier l'acceptation ou la rejection du test en fonction de la *p-value* affichée.

Solution

- Nous avons $N = 8$,$\hat{\mu} = 2.75$ et $\hat{\sigma}^2 = 37.92857$. La statistique de test est

  $$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{N}}}$$

  En remplaçant les bonnes valeurs on obtient

  $$T = \frac{2.75}{2.174} = 1.262974$$

  Or $t_{\alpha/2,N-1} = 2.365$ (obtenu par la commande R ci-dessus). Nous avons $T < t_{\alpha/2,N-1}$ et donc nous ne rejetons pas l'hypothèse H.