

INFO-F-302 - Logique Informatique

Projet d'année - Exemple de solution

Prof. Jean-François Raskin

Année académique 2008-2009

Etant donné un graphe $G = \langle V, E \rangle$ et un nombre entier $k \geq 1$, soit $n = |V|$ le nombre de sommets et $m = |E|$ le nombre d'arcs. On définit l'ensemble de propositions

$$P_k^V = \{p_i^v \mid v \in V \text{ et } 1 \leq i \leq k\}$$

où p_i^v est une proposition qui sera vraie si le sommet v est de couleur i .

On peut réduire le problème de coloriage d'un graphe G avec k couleurs au problème de satisfiabilité d'une formule de logique propositionnelle φ définie sur l'ensemble de propositions P_k^V . A partir de $G = \langle V, E \rangle$ et de k , nous construisons la formule $\varphi(G, k) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ de la façon suivante :

1. deux sommets reliés par un arc ne peuvent pas avoir la même couleur :

$$\varphi_1 = \bigwedge_{\{u,v\} \in E} \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \neg p_i^u \vee \neg p_i^v;$$

2. tout sommet est colorié :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \bigwedge_{v \in V} \bigvee_{1 \leq i \leq k} p_i^v \\ &= \bigwedge_{v \in V} p_1^v \vee p_2^v \vee \dots \vee p_k^v. \end{aligned}$$

Notons que φ_1 et φ_2 sont en forme normale conjonctive, que φ_1 contient $m \cdot k$ clauses de 2 littéraux et que φ_2 contient n clauses de k littéraux. On pourrait ajouter une contrainte supplémentaire φ_3 exprimant le fait que tout sommet possède au plus une couleur. Cette contrainte n'est cependant pas nécessaire pour encoder le problème de coloriage.

Théorème 1 Pour tout graphe $G = \langle V, E \rangle$ et pour tout entier $k \geq 1$, la formule $\varphi(G, k)$ est satisfiable si et seulement si le graphe G est coloriable avec k couleurs.

Démonstration Soit $G = \langle V, E \rangle$ un graphe et $k \geq 1$ un entier. D'abord, montrons que si $\varphi(G, k)$ est satisfiable, alors le graphe G est coloriable avec k couleurs. Considérons donc une valuation $\mu : P_k^V \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$ telle que $\mu \models \varphi(G, k)$. Par définition de la sémantique de la logique propositionnelle, on a $\mu \models \varphi_2$ et donc pour tout sommet $v \in V$, il existe une couleur $1 \leq i \leq k$ telle que la proposition p_i^v est vraie, c'est-à-dire $\mu(p_i^v) = \text{vrai}$. Construisons la fonction $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que pour tout $v \in V$, $f(v)$ est le plus petit i tel que $\mu(p_i^v) = \text{vrai}$. Nous avons aussi $\mu \models \varphi_1$, et donc pour tout arc $\{u, v\} \in E$, pour toute couleur $1 \leq i \leq k$, on a que si $\mu(p_i^u) = \text{vrai}$, alors $\mu(p_i^v) = \text{faux}$, et donc si $f(u) = i$, alors $f(v) \neq i$. Ceci montre que f est un coloriage de G , et clairement f n'utilise pas plus que k couleurs. Donc, le graphe G est coloriable avec k couleurs.

Ensuite, montrons que si le graphe G est coloriable avec k couleurs, alors $\varphi(G, k)$ est satisfiable. Considérons donc un coloriage $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de G . A partir de f , construisons une valuation $\mu : P_k^V \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$ telle que pour tout $v \in V$ et pour tout $1 \leq i \leq k$:

$$\mu(p_i^v) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } f(v) = i \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que $\mu \models \varphi(G, k)$, c'est-à-dire que $\mu \models \varphi_1$ et $\mu \models \varphi_2$. Comme f est un coloriage, on a $f(u) \neq f(v)$ pour tout $\{u, v\} \in E$. Donc, pour toute couleur i , on ne peut pas avoir à la fois $f(u) = i$ et $f(v) = i$. Par conséquent, soit $\mu(p_i^u) = \text{faux}$ soit $\mu(p_i^v) = \text{faux}$, ce qui montre que $\mu \models \varphi_1$. D'autre part, on a $\mu(p_{f(v)}^v) = \text{vrai}$ pour tout sommet $v \in V$, et donc $\mu \models \varphi_2$. \square

Pour déterminer le nombre minimum χ_G de couleurs nécessaires pour colorier un graphe G donné, on peut utiliser une recherche dichotomique. En effet, on a trivialement $1 \leq \chi_G \leq n$, et si un graphe est coloriable avec k couleurs, alors il est coloriable avec k' couleurs pour tout $k' \geq k$. Par conséquent, si on a déterminé que $\chi_G \in [a, b]$, alors si on teste la colorabilité de G avec c couleurs pour $c \in [a, b]$, on peut en déduire que $\chi_G \in [a, c]$ si G est coloriable avec c couleurs, et $\chi_G \in [c, b]$ si G n'est pas coloriable avec c couleurs. On choisira par exemple $c = \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$.