

INFO-F-302 - Logique Informatique

Projet d'année

Prof. Jean-François Raskin

Année académique 2008-2009

Introduction

Un graphe est une paire $\langle V, E \rangle$ où V est un ensemble fini de *sommets* et E est un ensemble de paires $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ avec $v_1 \neq v_2$. Une telle paire est appelée un *arc*.



(a) Un graphe avec 7 sommets et 12 arcs.

(b) Un coloriage avec 4 couleurs.

FIG. 1 – Exemple

Un graphe $G = \langle V, E \rangle$ est *coloriable* avec k couleurs si on peut associer à chaque sommet de V un nombre (appelé *couleur*) entre 1 et k de manière à ce que deux sommets reliés par un arc de E n'aient jamais la même couleur. Il faut donc qu'il existe une fonction (appelée *coloriage*) $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que $f(v_1) \neq f(v_2)$ pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$. Par exemple, le graphe de la Figure 1(a) est coloriable avec 4 couleurs. La Figure 1(b) donne un tel coloriage.

Le problème de coloriage de graphe demande, étant donné un graphe G et un nombre naturel k , de dire si G est coloriable avec k couleurs.

1 Énoncé

On vous demande de réaliser un programme permettant de déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier un graphe donné.

Pour ce faire, vous utiliserez la logique propositionnelle afin d'encoder le problème de coloriage de graphe. Vous donnerez une preuve de correction de cet encodage ainsi qu'une caractérisation de la taille de la formule pour k couleurs et un graphe à n sommets et m arcs. Votre programme devra construire une formule de logique propositionnelle (en forme normale conjonctive) utilisant des propositions atomiques judicieusement choisies. Vous utiliserez ensuite l'outil **zChaff** décrit ci-dessous pour déterminer si cette formule de logique est satisfiable et ainsi déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier le graphe donné en entrée. Le programme devra alors afficher un coloriage du graphe utilisant le minimum de couleurs (pour une formule satisfiable, **zChaff** vous fournira une valuation qui satisfait la formule).

Pratiquement, votre programme prendra en entrée un fichier contenant une suite de nombres entiers représentant le graphe. Le premier nombre est la taille du graphe (le nombre de sommets $|V|$), les suivants sont les extrémités des arcs du graphe. Le graphe de la Figure 1(a) sera fourni de la manière suivante :

```
7
1 2
1 5
1 7
2 3
2 4
3 4
3 5
3 6
4 6
4 7
5 6
6 7
```

Votre programme devra ensuite afficher le nombre minimal de couleurs permettant de colorier le graphe en entrée, et donner un tel coloriage (par exemples sous la forme d'une partition de l'ensemble des sommets).

2 zChaff

zChaff [1] est un *sat solver*, c'est-à-dire un programme qui permet de tester la satisfiabilité de formules de logique propositionnelle en forme normale conjonctive. Un exemple d'utilisation de zChaff est fourni dans le fichier `exemple.py` disponible sur la page Web du cours¹. Pour exécuter cet exemple, vous devez exécuter la commande `python exemple.py` dans un répertoire contenant les fichiers `zchaff.py` et `_zchaff.so` également disponibles sur la page Web du cours.

3 Modalités

Ce projet est à réaliser par groupe de 2 personnes. Votre programme (écrit en Python [2]), ainsi qu'un rapport décrivant votre solution, est à remettre au secrétariat étudiant pour le 24/04/2009 au plus tard. De plus, et ce pour la même date, vous enverrez votre implémentation, ainsi qu'une version électronique du rapport, à l'adresse `ldoyen@ulb.ac.be`, en mentionnant comme sujet "Projet logique" et dans le corps du mail les membres du groupe.

Références

- [1] zChaff. <http://www.princeton.edu/~chaff/zchaff.html>.
- [2] Python. <http://www.python.org/>.

¹<http://www.ulb.ac.be/di/info-f-302/>