

INFO-F-302, Cours d'Informatique
Fondamentale
Logique pour l'Informatique

Emmanuel Filiot
Département d'Informatique
Faculté des Sciences
Université Libre de Bruxelles

Année académique 2011-2012
Basé sur le cours *Logique Informatique* du Pr. J.-F. Raskin

Les formes normales

Une formule est en *forme normale conjonctive* (FNC) ssi c'est une conjonction de disjonctions de littéraux, c'est-à-dire une formule de la forme :

$$\bigwedge_i (\bigvee_j (\neg) p_{i,j})$$

Une formule est en *forme normale disjonctive* (FND) ssi c'est une disjonction de conjonctions de littéraux, c'est-à-dire une formule de la forme :

$$\bigvee_i (\bigwedge_j (\neg) p_{i,j})$$

Les formes normales

Exemples :

$$p \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r)$$

est une formule en forme normale conjonctive. Tandis que

$$p \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r)$$

est une formule en forme normale disjonctive.

Exercice : donner une forme normale disjonctive pour la première formule et une forme normale conjonctive pour la seconde.

Les formes normales

Notons $Prop(\phi)$ l'ensemble des propositions qui apparaissent dans la formule ϕ .

Fonction associée à une formule :

$$F_\phi : Valuation \rightarrow \{0, 1\}$$

ou encore

$$F_\phi : \{0, 1\}^{Prop(\phi)} \rightarrow \{0, 1\}$$

F_ϕ assigne à chaque valuation possible pour les propositions de ϕ la valeur 0 ou 1. On définit F_ϕ de la façon suivante :

$$F_\phi(V) = \llbracket \phi \rrbracket_V$$

Les formes normales

Proposition

Deux formules ϕ et ψ sont équivalentes ssi elles définissent la même fonction, c'est-à-dire pour toute fonction d'interprétation V des propositions de ϕ , $F_\phi(V) = F_\psi(V)$.

(Preuve laissée comme exercice)

Corollaire

Il existe au plus 2^{2^n} formules, deux à deux non équivalentes, du calcul propositionnel construit sur n propositions.

Les formes normales

Théorème

Toute fonction F de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ peut être représentée par une formule propositionnelle à n variables, i.e. qu'il existe une formule ϕ construites sur un ensemble $\{p_1, \dots, p_n\}$ de propositions, telle que $F = F_\phi$.

Preuve. Preuve par induction sur le nombre n de propositions.

(i) $n = 1$: les 4 fonctions possibles sont équivalentes à :

$p, \neg p, \neg p \vee p, \neg p \wedge p$.

(ii) $n > 1$. Par **HI**, la propriété est vraie pour $n-1$. $P = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ et $F : \{0, 1\}^P \rightarrow \{0, 1\}$ peut décomposée en deux fonctions F_1 et F_0 de $\{0, 1\}^{\{p_1, \dots, p_{n-1}\}}$ vers $\{0, 1\}$ définies comme F où l'on suppose que p_n est toujours mis à vrai ou faux respectivement. En d'autre terme, pour toute valuation $V : \{0, 1\}^P \rightarrow \{0, 1\}$, on a :

$$F(V) = \begin{cases} F_1(V|_{\{p_1, \dots, p_{n-1}\}}) & \text{si } V(p_n) = 1 \\ F_0(V|_{\{p_1, \dots, p_{n-1}\}}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $V|_{\{p_1, \dots, p_{n-1}\}}$ est la restriction de V aux variables $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$.

Les formes normales

Théorème

Toute fonction F de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ peut être représentée par une formule propositionnelle à n variables, i.e. qu'il existe une formule ϕ construite sur un ensemble $\{p_1, \dots, p_n\}$ de propositions, telle que $F = F_\phi$.

Preuve.

Par **HI** il existe deux formules ϕ_{F_1} et ϕ_{F_0} et on construit la formule recherchée de la façon suivante :

$$\phi_F = (p_n \rightarrow \phi_{F_1}) \wedge (\neg p_n \rightarrow \phi_{F_0})$$

Proposition

Soient deux formules ϕ et ψ telles que ψ représente F_ϕ .

Les formes normales

Théorème

Toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une forme normale disjonctive et à une forme normale conjonctive.

Preuve. D'après la proposition précédente, il suffit de démontrer que toute fonction $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ peut être représentée par une formule en FNC et une en FND.

On raisonne par induction sur le nombre de propositions :

$$(i) |Prop(\phi)| = |\{p\}| = 1$$

4 fonctions possibles exprimées par les formules suivantes :

$p, \neg p, \neg p \vee p, \neg p \wedge p$, formules qui sont à la fois FNC, FND.

(ii) $n > 1$. Par **HI** le théorème est vrai pour $n - 1$. Comme dans le théorème précédent, on peut décomposer F en deux fonctions F_1 et F_0 , qui par **HI** se décomposent en deux formules ψ_0 et ψ_1 , telles que F est représentée par :

$$(\neg p_n \rightarrow \psi_0) \wedge (p_n \rightarrow \psi_1) \text{ équivalente à } (\neg p_n \wedge \psi_0) \vee (p_n \wedge \psi_1)$$

Les formes normales

Théorème

Toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une forme normale disjonctive et à une forme normale conjonctive.

Preuve (Suite). On peut supposer que ψ_1 et ψ_0 sont en forme normale disjonctive :

$$\psi_1 = \psi_{11} \vee \dots \vee \psi_{1k} \qquad \psi_0 = \psi_{01} \vee \dots \vee \psi_{0l}$$

où les formules ψ_{ij} sont des conjonctions de littéraux.

De plus $\neg p_n \wedge \psi_0 \equiv (\neg p_n \wedge \psi_{01}) \vee \dots \vee (\neg p_n \wedge \psi_{0l})$ est en FND, et

$p_n \wedge \psi_1 \equiv (p_n \wedge \psi_{11}) \vee \dots \vee (p_n \wedge \psi_{1k})$ est en FND.

Pour la FNC, on utilise l'équivalence (exercice) :

$$\begin{aligned} F_\phi &= (\neg p_n \rightarrow \psi_0) \wedge (p_n \rightarrow \psi_1) \\ &= (p_n \vee \psi_0) \wedge (\neg p_n \vee \psi_1) \end{aligned}$$

CQFD

Les formes normales

En pratique, on utilise les transformations successives suivantes pour obtenir les formes normales :

- 1 élimination des connecteurs \rightarrow et \leftrightarrow grâce aux équivalences suivantes :

$$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$$

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi)$$

- 2 entrer les négations le plus à l'intérieur possible :

$$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi) \quad \neg\neg\phi \equiv \phi$$

$$\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

- 3 utilisation des distributivité de \wedge et \vee l'un par rapport à l'autre :

$$(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \text{ (pour mise sous FND)}$$

$$(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \text{ (pour mise sous FNC)}$$

Exercices :

- appliquer ces transformations à :

$$\neg(p \leftrightarrow (q \rightarrow r))$$

- prouver l'adéquation des équivalences ;
- prouver la complétude des règles de transformation (est-ce que toute formule peut-être mise sous une forme normale en utilisant les règles).