Logique Informatique*

Séance 8 - La déduction naturelle dans la logique du premier ordre

Prof. Jean-François Raskin

1 Solutions

1. $\forall x \cdot (p(x) \vee \neg q(x)), \forall y \cdot q(y) \vdash \forall x \cdot p(x)$

1	$\forall x \cdot (p(x) \vee \neg q(x))$	prémisse
2	$\forall y \cdot q(y)$	prémisse
3	$p(x_0) \vee \neg q(x_0)$	$\forall x_e$ 1
4	$q(x_0)$	$\forall x_e$ 2
5	$p(x_0)$	hypothèse
6	$p(x_0)$	copie (fin hypothèse 5)
7	$\neg q(x_0)$	hypothèse
8	$\perp$	$\neg_e$ 4,7
9	$p(x_0)$	$\perp_e$ 8 (fin hypothèse 7)
10	$p(x_0)$	$\vee_e$ 3,5-6,7-9
11	$\forall x \cdot p(x)$	$\forall x_i$ 3-10 (x_0 fraîche)

2. $\forall x \cdot p(x) \vdash \neg \exists x \cdot \neg p(x)$

1	$\forall x \cdot p(x)$	prémisse
2	$\exists x \cdot \neg p(x)$	hypothèse
3	$\neg p(x_0)$	hypothèse
4	$p(x_0)$	$\forall x_e$ 1
5	$\perp$	$\neg_e$ 3, 4 (fin hypothèse 3)
6	$\perp$	$\exists x_e$ 2,3-5 (fin hypothèse 2)
7	$\neg \exists x \cdot \neg p(x)$	$\neg_i$ 2-6

*http://www.ulb.ac.be/di/info-f-302/

3. $\exists x \cdot (p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall x \cdot q(x), p(a) \vdash q(b)$

1	$\exists x \cdot (p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall x \cdot q(x)$	prémisse
2	$p(a)$	prémisse
3	$p(a) \vee q(a)$	$\vee_{i_1}$ 2
4	$\exists x \cdot p(x) \vee q(x)$	$\exists x_i$ 3
5	$\forall x \cdot q(x)$	$\rightarrow_e$ 1, 4
6	$q(b)$	$\forall x_e$ 5