Test informatisé	**(Corrigé)**	**/20**

C4

Connaissances préalables :	*Distribution binomiale.*
Buts spécifiques :	*Calcul de probabilités et évaluation de règles de décision.*
Outils nécessaires:	*TI-84+, programme utilisateur* DISTR.
Consignes générales :	*Donnez les résultats numériques sous forme décimale avec une precision de trois décimales.*

Un test de connaissance informatisé est constitué d'une série de maximum cinq questions à choix multiple.

A chaque question, 5 réponses sont proposées : une réponse correcte et 4 distracteurs.

La procédure est telle que le sujet qui subit le test est obligé de répondre à une question (correctement ou incorrectement) pour passer à la question suivante.

1. Si l'on ne pose qu'une question, quelle est la probabilité qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde correctement ?

Réponse :

1/5=0,200

/1

2. Si l'on ne pose qu'une question, quelle est la probabilité qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde incorrectement ?

Réponse :

4/5=0,800

/1

3. Si l'on pose deux questions successivement, quelle est la probabilité qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde correctement aux deux questions ?

<u>Réponse</u> :

<u>$0{,}2^2=0{,}040$</u>

<u>Raisonnement</u> :

P (le sujet répond correctement aux deux questions)

= P (le sujet répond correctement à la 1ère question n (et) le sujet répond correctement à la 2ème question)

Or, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ lorsque les événements A et B sont indépendants.

Puisque le sujet répond tout à fait au hasard, la réponse qu'il donne à une question n'influence en aucune manière la réponse qu'il donne à l'autre question.

= P (le sujet répond correctement à la 1ère question)×P(le sujet répond correctement à la 2ème question)

$= (0{,}2).(0{,}2) = (0{,}2)^2 = 0{,}04$.

/1

4. Si l'on pose deux questions successivement, quelle est la probabilité pour qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde incorrectement aux deux questions ?

<u>Réponse</u> :

$0{,}8^2=0{,}640$

/1

5. Si l'on pose deux questions successivement, quelle est la probabilité pour qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard commette une et une seule erreur ?

Réponse :

2x0,2x0,8=0,320

Raisonnement :

P (le sujet commet une et une seule erreur)

= P ({le sujet répond correctement à la 1ère question $\cap$ le sujet répond incorrectement à la 2ème question} $\cup$ (ou) {le sujet répond incorrectement à la 1ère question $\cap$ le sujet répond correctement à la 2ème question})

Or, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ lorsque les événements A et B sont incompatibles.

= P (le sujet répond correctement à la 1ère question $\cap$ le sujet répond incorrectement à la 2ème question) + P (le sujet répond incorrectement à la 1ère question $\cap$ le sujet répond correctement à la 2ème question)

= P (le sujet répond correctement à la 1ère question).P (le sujet répond incorrectement à la 2ème question) + P (le sujet répond incorrectement à la 1ère question).P (le sujet répond correctement à la 2ème question)

= (0,2)(0,8) + (0,8)(0,2) = 2.(0,2)(0,8) = 0,320.

/2

6. Retranscrivez les résultats précédents (correspondant à des séquences d'une question ou de 2 questions successives) dans le tableau ci-dessous. Complétez ce dernier en calculant les probabilités d'obtenir un nombre donné de réponses fausses pour des séquences de respectivement 3, 4 et 5 questions successives.

Nombre de questions	1	2	3	4	5
Probabilité de n'observer aucune faute	**0,200**	**0,040**	**0,008**	**0,002**	**0,000**
Probabilité d'observer une et une seule faute	**0,800**	**0,320**	**0,096**	**0,026**	**0,006**
Probabilité d'observer exactement 2 fautes		**0,640**	**0,384**	**0,154**	**0,051**
Probabilité d'observer exactement 3 fautes			**0,512**	**0,410**	**0,205**
Probabilité d'observer exactement 4 fautes				**0,410**	**0,410**
Probabilité d'observer exactement 5 fautes					**0,328**
Totaux	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**

/6

Raisonnement :

Supposons que le test soit constitué de n questions (n = 1, 2, 3, 4 ou 5). La variable X comptant le nombre de réponses fausses données par un sujet ignorant tout et répondant au hasard suit une loi Bin (n; 0,8). Les probabilités demandées au point 6 s'obtiennent alors à l'aide du programme utilisateur *DISTR* **de la** *TI-83*.

Pour décider de la réussite ou non au test, on décide d'adopter la règle suivante :

Dès que la probabilité d'obtenir par pur hasard le nombre observé de fautes est inférieure au seuil de 0,05, le test séquentiel est arrêté et le sujet est déclaré avoir réussi.

7. Au bout de combien de questions un sujet ne commettant aucune faute a-t-il réussi ?

Réponse :

Au bout de deux questions.

En effet, 0,040 est la première valeur inférieure au seuil.

/2

8. Au bout de combien de questions un sujet commettant une et une seule erreur d'inattention a-t-il réussi ?

Réponse : **Au bout de 4 questions (0,026 est la première valeur inférieure au seuil).**

/2

9. Au bout de combien de questions un sujet commettant deux fautes a-t-il réussi ?

Réponse : **Jamais (toutes les probabilités sont supérieures au seuil).**

/2

10. A partir de combien d'erreurs n'est-il plus nécessaire de continuer le processus (en supposant qu'on ne dispose que de 5 questions au maximum) ?

Réponse : **Au bout de deux erreurs (à partir de deux erreurs, toutes les probabilités calculées sont supérieures au seuil).**

/2

Echantillon issu d'une population normale ou non ? (1)	**(Corrigé)** **/05**

D3

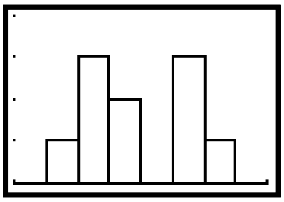
Connaissances préalables :	*Statistique descriptive ; distribution normale.*
Buts spécifiques :	*Evaluer si un échantillon peut être considéré comme issu d'une population normale ou non.*
Outils nécessaires:	*Calculatrice TI-83.*
Consignes générales :	*Raisonnez à partir de représentations graphiques.*

Un échantillon aléatoire simple d'effectif 10 est prélevé au sein d'une population. Dans l'échantillon, une variable aléatoire X prend les valeurs suivantes :

Cas	Valeurs observées
1	10
2	11
3	7
4	10
5	7
6	8
7	6
8	10
9	7
10	8

1. Tracez un diagramme en bâtons (ou un histogramme avec des classes de largeur 1) de la distribution observée dans l'échantillon.

Réponse :



/2

2. Pensez-vous que l'échantillon puisse provenir d'une population où la variable X se distribue suivant une loi normale ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Non.

La distribution observée dans l'échantillon est bimodale et légèrement dissymétrique, alors que la distribution normale est unimodale et symétrique.

/2

Calcul de probabilités à partir d'une distribution approximativement normale Corrigé)
/10

D7

Connaissances préalables :	*Distribution normale; correction de continuité.*
Buts spécifiques :	*Calcul de probabilités à l'aide d'une distribution normale.*
Outils nécessaires:	*TI-84+* , programme utilisateur DISTR.
Consignes générales :	*Exprimez les résultats numériques avec une précision de trois décimales.*

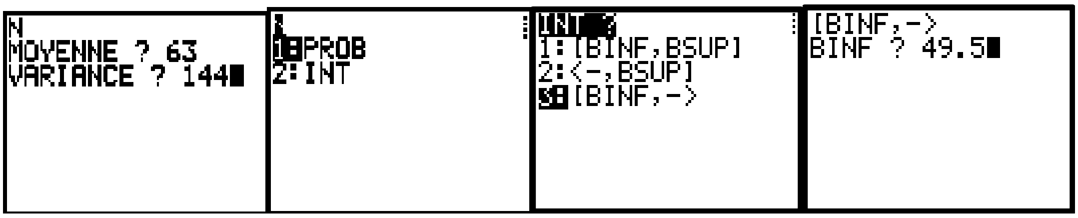
Les sujets d'une population donnée ont subi un examen noté sur 100.

Bien que la note ne puisse prendre que des valeurs entières, on considère que la distribution de la note X dans la population peut être approchée par une distribution normale. Plus précisément, on considère que le comportement probabiliste de la variable aléatoire discrète X peut être approximé par celui d'une variable X^* de loi normale de moyenne 63 et d'écart-type égal à 12.

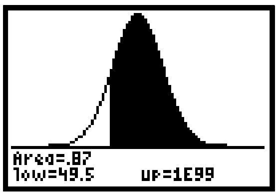
1. Calculez, en effectuant une correction de continuité, la probabilité qu'un sujet sélectionné au hasard dans la population ait obtenu une note supérieure ou égale à 50. (Remarquons que ceci revient aussi à calculer la proportion de sujets dans la population qui ont obtenu au moins la moitié des points à l'examen.)

<u>Réponse</u> :

$\mathbf{P(X \geq 50) \approx P(X^* \geq 49{,}5) = 0{,}870}$



Probabilité : **0,870**

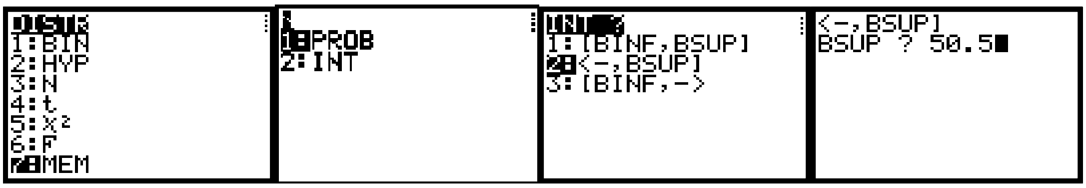


/2

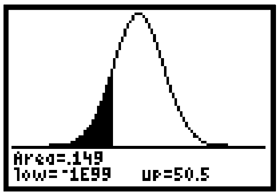
2. Calculez, en effectuant une correction de continuité, la probabilité qu'un sujet sélectionné au hasard dans la population ait obtenu une note inférieure ou égale à 50. (Remarquons que ceci revient aussi à calculer la proportion de sujets dans la population qui ont obtenu au maximum 50 points à l'examen.)

Réponse :

$P(X \leq 50) \approx P(X^{*} \leq 50{,}5) = 0{,}149$



Probabilité : **0,149**

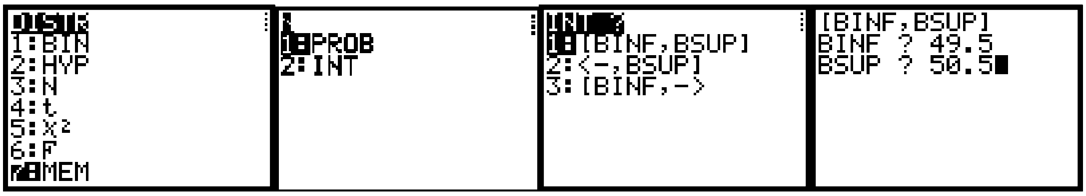


/2

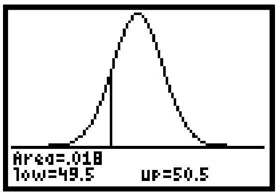
3. Calculez, en effectuant une correction de continuité, la probabilité qu'un sujet sélectionné au hasard dans la population ait obtenu une note exactement égale à 50. (Remarquons que ceci revient aussi à calculer la proportion de sujets dans la population qui ont obtenu exactement la moitié des points à l'examen.)

Réponse :

$P(X=50) \approx P(49{,}5 \leq X^{*} \leq 50{,}5) = 0{,}018$



Probabilité : **0,018**



/3

4. Vérifiez la cohérence de vos résultats en indiquant une relation qui doit être vérifiée par les trois probabilités calculées.

Réponse :

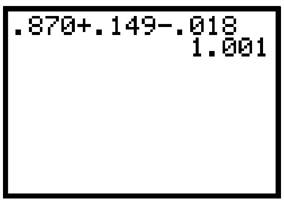
Les deux premiers événements reprennent tous les cas possibles mais ne sont pas exclusifs (incompatibles).

Leur intersection est égale au 3ème événement dont on a calculé la probabilité.

La relation suivante doit donc se vérifier :

$$P(X \geq 50) + P(X \leq 50) - P(X = 50) = 1$$

Cette relation se vérifie numériquement, aux erreurs d'arrondi près :



/3