

## T.P. 7 – Rappels théorique

### Analyse combinatoire

Connaissances préalables :	Notion classique de probabilité.
Buts spécifiques :	Analyse combinatoire et probabilités.
Outils nécessaires :	Papier/crayon.
Consignes générales :	Donnez successivement les résultats sous forme de fraction et sous forme de décimale avec une précision de trois décimales.

L'analyse combinatoire est un ensemble de techniques qui permettent d'effectuer le décompte des cas de (non) réalisation d'un événement. Elle fait essentiellement appel aux notions de tirages exhaustifs (sans remise) et non exhaustifs (avec remise) ainsi que de pertinence ou de non pertinence de l'ordre d'apparition des événements. Elle comprend l'étude des arrangements, des permutations et des combinaisons (y compris les notions mathématiques de puissance et de partition).

#### a) Notation factorielle

Si  $N$  est un nombre naturel, la factorielle de  $N$ , notée  $N!$  est donnée par

$$N! = N (N-1) (N-2) \dots \cdot 1$$

Il s'ensuit que

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Par ailleurs

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad 1! = 1$$

#### b) Règles des produits (cas particulier)

Le nombre de séquences possibles pour  $N$  essais si  $K$  événements mutuellement exclusifs et exhaustifs peuvent se produire lors de chaque essai est donné par

$$K^N$$

Exemple : Le nombre de séquences de 5 lettres avec les lettres A, B et C est de

$$3^5 = 243$$

#### c) Règles des produits (cas général)

Si  $K_1, K_2, \dots, K_N$  sont les nombres d'événements distincts qui peuvent se produire aux cours des essais 1, 2, ...,  $N$  dans une série, le nombre de séquences différentes de  $N$  événements est donné par le produit

$$K_1 * K_2, \dots, * K_N$$

Exemple pour  $N = 2$  essais. A l'essai 1, on lance une pièce ( $K_1=2$ ) et à l'essai 2, on lance un dé ( $K_2=6$ ).

Nombre de séquences possibles =  $2 * 6 = 12$

## d) Permutations

Si l'on a un ensemble de  $N$  objets différents que l'on veut tous (tirage exhaustif) ranger de manière différente (pertinence de l'ordre), on aura  $N!$  ordres possibles de rangement de ces  $N$  objets. On dit que le nombre de permutations de  $N$  objets différents par paquets de  $N$  vaut  $N!$  et on note

$$\boxed{P_N = N!}$$

Exemple : si nous avons 3 objets X, Y et Z, il y a  $3!$  séquences possibles soit

$$3! = 3 * 2 * 1 = 6, \text{ à savoir :}$$

XYZ  
XZY  
YZX  
YXZ  
ZXY  
ZYG

Explication : En première position, on a le choix entre trois objets possibles. Une fois un de ces objets choisi pour la position 1, il reste deux objets possibles pour la position 2 et un seul pour la dernière position.

## e) Arrangements

Si, dans un ensemble de  $N$  objets différents, on veut extraire  $r$  objets différents (tirage exhaustif) et ranger ces  $r$  objets de manière différente (pertinence de l'ordre), il y aura :

$$\boxed{A_N^r = \frac{N!}{(N - r)!}}$$

## f) Combinaisons

Si dans un ensemble de  $N$  objets différents on veut extraire des groupes de  $r$  objets (tirage exhaustif), sans accorder d'importance à l'ordre des objets (non pertinence de l'ordre), il y aura :

$$\boxed{C_N^r = \frac{N!}{(N - r)!r!}}$$

N.B. : Souvent on utilise la notation :  $\binom{N}{r}$  au lieu de  $C_N^r$

## T.P. 7 – Exercice 1

### Arrangements et permutations (Corrigé)

On organise un tirage au sort pour déterminer l'ordre de passage d'un examen pour 3 étudiants. Nous appellerons ces 3 étudiants A, B et C pour plus de facilité.

1. Combien y a-t-il de possibilités pour la première position ?

Réponse : Il y a trois possibilités (A, B et C)

2. Combien y a-t-il de possibilités pour les deux premières positions ? Donnez ces différentes possibilités. Quelle formule permet de calculer cela ?

Réponse :

Il y a 6 possibilités :

AB	BA	CA
AC	BC	CB

Il s'agit d'un arrangement de 3 (N) objets différents sur 2 (r) positions.

Nous avons donc :

$$A_N^r = \frac{N!}{(N-r)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$$

3. Combien y a-t-il de possibilités pour l'ensemble des trois étudiants ? Donnez ces différentes possibilités. Quelle formule permet de calculer cela ?

Réponse :

Il y a 6 possibilités :

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Il s'agit d'un arrangement de 3 (N) objets différents sur 3 (r) positions.

Nous avons donc :

$$A_N^r = \frac{N!}{(N-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3 * 2 * 1}{1} = 6$$

Il ne reste plus qu'un élément possible pour la dernière position.  
Faire un arrangement si  $N = r$ , revient à faire une simple permutation :

$$P_n = N! \Leftrightarrow P_3 = 3! = 6$$

4. Combien y a-t-il de possibilités pour le tirage au sort si le nombre d'élèves s'élève à 10 ?

Réponse :  $P_n = N! \Leftrightarrow P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

**T.P. 7 – Exercice 2**  
**Principe de dénombrement et probabilités**  
**Arrangements et combinaisons (Corrigé)**

Quatorze boules identiques, numérotées de 1 à 14, sont placées dans une urne.

1. Calculez le nombre de tierces possibles dans l'ordre et dans le désordre.

Réponse :

$$\begin{aligned} \text{Dans l'ordre : } A_{14}^3 &= 2184 \\ \text{Dans le désordre : } C_{14}^3 &= 364 \end{aligned}$$

2. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 (dans l'ordre) soient tirées ?

Réponse :

$$\frac{1}{2184}$$

3. Calculez le nombre de quartes possibles dans l'ordre et dans le désordre.

Réponse :

$$\begin{aligned} \text{Dans l'ordre : } A_{14}^4 &= 24\,024 \\ \text{Dans le désordre : } C_{14}^4 &= 1001 \end{aligned}$$

4. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2, 3 et 4 (dans l'ordre) soient tirées ?

Réponse :

$$\frac{1}{24\,024}$$

5. Calculez le nombre de quintes possibles dans l'ordre et dans le désordre.

Réponse :

$$\begin{aligned} \text{Dans l'ordre : } A_{14}^5 &= 240\,240 \\ \text{Dans le désordre : } C_{14}^5 &= 2002 \end{aligned}$$

6. Calculez le nombre de sixtes possibles dans l'ordre et dans le désordre.

Réponse :

$$\begin{aligned} \text{Dans l'ordre : } A_{14}^6 &= 2\,162\,160 \\ \text{Dans le désordre : } C_{14}^6 &= 3003 \end{aligned}$$

## T.P. 7 – Exercice 3

### Distribution Binomiale (Corrigé)

Connaissances préalables :	Notion classique de probabilité.
Buts spécifiques :	Notion de distribution binomiale.
Outils nécessaires :	Table des coefficients binomiaux et table de distribution binomiale
Consignes générales :	Donnez successivement les résultats sous forme de fraction et sous forme de décimale avec une précision de quatre décimales.

Définition: la distribution binomiale décrit la distribution de probabilités lorsqu'il n'y a que deux résultats possibles à chaque essai et que le résultat d'un essai est indépendant du résultat de tout autre essai.

Les deux résultats possibles ont une probabilité identifiée par les lettres  $p$  (pour l'un) et  $q$  (pour l'autre), ils sont évidemment complémentaires c'est-à-dire que l'ensemble  $p+q$  comprend toutes les possibilités donc une probabilité de 1.

On note que:  $p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$  ou que  $p = 1 - q$

La probabilité d'obtenir  $r$  succès en  $N$  essais est donnée par

$$P(X) = C_N^r p^r q^{N-r} = \frac{N!}{(N-r)!r!} p^r q^{N-r}$$

où

$P(X)$  = la probabilité d'avoir  $X$  succès

$N$  = le nombre d'essais

$p$  = la probabilité d'obtenir un succès lors d'un essai quelconque

$q$  =  $(1 - p)$  = la probabilité d'obtenir un échec lors d'un essai quelconque

$r$  = le nombre de succès attendus

#### Utilisation de la table

Le calcul des probabilités binomiales peut devenir fastidieux. Ainsi, pour les valeurs fréquentes, on utilise la table de l'annexe I

1. On lance une pièce 2 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1.1. 0 face

1.2. 1 face

1.3. 2 faces

N.B. : Aidez-vous d'un dessin en « arbre » pour trouver la réponse.

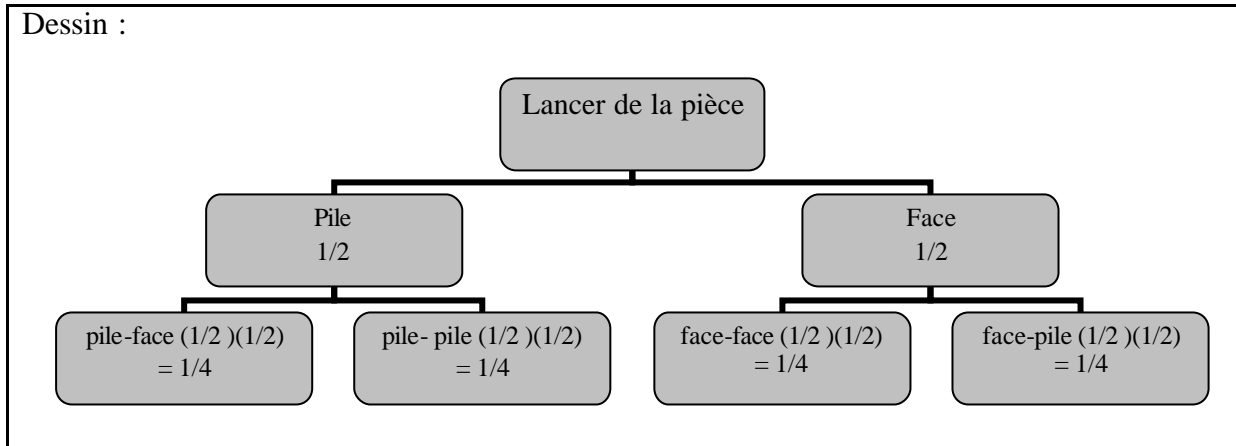
Réponse :

1.1. 0 face :  $1/4 = 0,25$

1.2. 1 face :  $2/4 = 1/2 = 0,5$

1.3. 2 faces :  $1/4 = 0,25$

Dessin :



2. Même exercice avec les formules adéquates.

Réponse :

$$p = P(\text{face}) = 0,5 \text{ (succès)}$$

$$q = Q(\text{pile}) = 0,5 \text{ (échec)}$$

$$N = 2 \text{ (2 lancers)}$$

$$P(0 \text{ face}) = C_N^r p^r q^{N-r} = \frac{N!}{(N-r)!r!} p^r q^{N-r} = C_2^0 0,5^0 0,5^{2-0}$$

$$= \frac{2!}{(2-0)!0!} 0,5^0 0,5^{2-0} = \frac{2*1}{2*1*1} * 1 * 0,5^2 = 0,5^2 = 0,25$$

$$P(1 \text{ face}) = C_2^1 0,5^1 0,5^{2-1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} 0,5^1 0,5^{2-1} = \frac{2*1}{1*1} * 0,5 * 0,5^1 = 2 * 0,5^2 = 0,5$$

$$P(2 \text{ faces}) = C_2^2 0,5^2 0,5^{2-2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} 0,5^2 0,5^0 = \frac{2*1}{1*2} * 0,5^2 * 0,5^0 = 1 * 0,5^2 = 0,25$$

3. Même exercice avec l'utilisation de la table des coefficients binomiaux (Figure 5.3a)

Réponse :

$$\text{Pour } P(0 \text{ face}), \text{ la table nous dit que } C_N^r = C_2^0 = 1 \Leftrightarrow 1 * 0,5^0 0,5^{2-0} = 0,25$$

$$\text{Pour } P(1 \text{ face}), \text{ la table nous dit que } C_N^r = C_2^1 = 2 \Leftrightarrow 2 * 0,5 * 0,5^1 = 0,5$$

$$\text{Pour } P(2 \text{ faces}), \text{ la table nous dit que } C_N^r = C_2^2 = 1 \Leftrightarrow 1 * 0,5^2 * 0,5^0 = 0,25$$

4. Même exercice avec l'utilisation de la table de la distribution binomiale (Figure 5.3b)

Réponse :

Pour  $N = 2$  et  $p$  et  $q = 0,5$ ,  
nous trouvons les probabilités cumulées suivantes dans la table :

Pour 0, nous avons .2500

Pour 1, nous avons .7500

Et pour 2, nous avons 1.0000

Ce qui donne bien des probabilités de .25, .50 (c'est-à-dire .75-.25)  
et .25 (c'est-à-dire 1-.75) .

## Moyenne et variance d'une distribution de probabilités

Comme il s'agit d'une moyenne de probabilités il n'est plus nécessaire de diviser par N et nous avons donc :

$$\mathbf{m} = \sum_{j=1}^J x_j p(x_j) \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^J p(x_j) = 1$$

$$\mathbf{s}^2 = \sum_{j=1}^J (x_j - \mathbf{m})^2 p(x_j)$$

N.B. :  $\mathbf{s}^2$  se lit « sigma au carré » et  $\mathbf{m}$  se lit « mu »

## Moyenne et variance d'une distribution binomiale

$$\mathbf{m} = Np$$

$$\mathbf{s}^2 = Npq$$

5. Calculez de deux manières différentes, la moyenne et la variance de la distribution de probabilités que vous avez établie au point 4. Combien en vaut l'écart type ?

Réponse :

$$\mathbf{m} = \sum_{j=1}^J x_j p(x_j) = 0 * .25 + 1 * .5 + 2 * .25 = 1$$

$$\mathbf{s}^2 = \sum_{j=1}^J (x_j - \mathbf{m})^2 p(x_j) = (0 - 1)^2 * .25 + (1 - 1)^2 * .5 + (2 - 1)^2 * .25 = .5$$

Mais comme il s'agit d'une distribution binomiale, nous pouvons utiliser les formules simplifiées :

$$\mathbf{m} = Np = 2 * .5 = 1$$

$$\mathbf{s}^2 = Npq = 2 * .5 * .5 = .5$$

$$\mathbf{s} = \sqrt{.5} = .71$$

## T.P. 7 – Exercice 4 (Corrigé)

### Utilisation de la table de la distribution binomiale non cumulée

1. Dans une usine, on prélève un échantillon de 10 appareils pour un contrôle de qualité. Quelle est la probabilité qu'un ou moins de ces 10 appareils soit défectueux sachant que 10% des appareils produits dans cette usine sont défectueux ? Aidez-vous de la table 1 (ci-dessous) qui est la distribution (non cumulée) des probabilités pour  $B(10,0.1)$ . Tracez un histogramme de cette distribution de probabilités avec en abscisse le nombre de machines défectueuses possibles dans l'échantillon et en ordonnée les probabilités associées. Calculez la moyenne et la variance de cette distribution.

Table 1

$N$	$x$	$p$
10	0	.3487
	1	.3874
	2	.1937
	3	.0574
	4	.0112
	5	.0015
	6	.0001
	7	.0000
	8	.0000
	9	.0000
	10	.0000

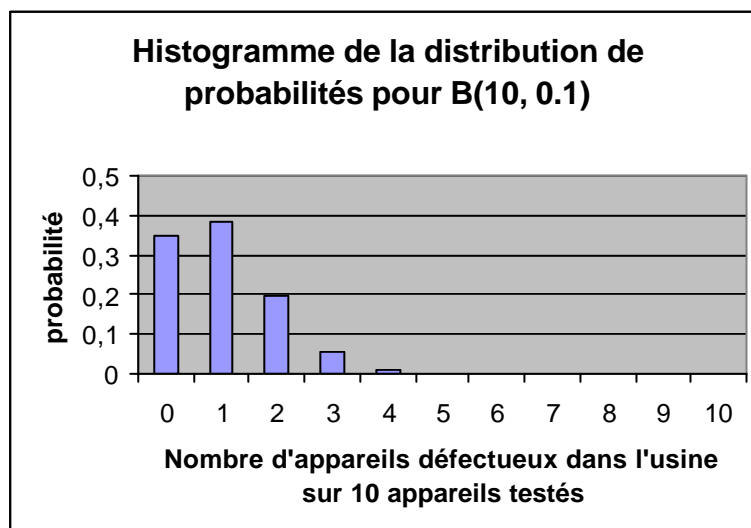
Réponse :

La probabilité qu'un appareil ou moins soit défectueux est de :  
 $.3487 + .3874 = .7361$

$$\mu = Np = 10 * .1 = 1$$

$$s^2 = Npq = 10 * .1 * .9 = .9$$

Histogramme :



2. D'après certaines données, 25% des femmes au chômage n'ont jamais été mariées. On prélève un échantillon de 10 femmes chômeuses au hasard :
- 2.1. Quelle est la probabilité qu'exactly 2 femmes n'aient jamais été mariées ? Aidez-vous de la table 2 (ci-dessous).
  - 2.2. Quelle est la probabilité que 2 ou moins n'aient jamais été mariées ?
  - 2.3. Quelle est la probabilité qu'au moins 8 ne soient pas mariées ?
  - 2.4. Quelle sont la moyenne et la variance de cette distribution ?

Table 2

		$p$
$N$	$x$	0.25
10	0	.05631
	1	.18771
	2	.28157
	3	.25028
	4	.14600
	5	.05840
	6	.01622
	7	.00309
	8	.00039
	9	.00003
	10	.00000

Réponse :

$$2.1. P(r=2) = .28157$$

$$2.2. P(r \leq 2) = .05631 + .18771 + .28157 = .52559$$

$$2.3. P(r > 8) = .00039 + .00003 + .00000 = 4,2 \cdot 10^{-4}$$

$$2.4. \mu = Np = 10 \cdot .25 = 2,5$$

$$s^2 = Npq = 10 \cdot .25 \cdot .75 = 1,875$$

## T.P. 7 – Exercice supplémentaire 1 (Corrigé)

Un test de connaissance informatisé est constitué d'une série de maximum cinq questions à choix multiple. A chaque question, 5 réponses sont proposées : une réponse correcte et 4 distracteurs. La procédure est telle que le sujet qui subit le test est obligé de répondre à une question (correctement ou incorrectement) pour passer à la question suivante.

1. Si l'on ne pose qu'une question, quelle est la probabilité qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde correctement ?

Réponse :

$$1/5=0,200$$

2. Si l'on ne pose qu'une question, quelle est la probabilité qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde incorrectement ?

Réponse :

$$4/5=0,800$$

3. Si l'on pose deux questions successivement, quelle est la probabilité qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde correctement aux deux questions ?

Réponse :

$$0,2^2=0,040$$

Raisonnement :

P (le sujet répond correctement aux deux questions)

= P (le sujet répond correctement à la 1<sup>ère</sup> question n (et) le sujet répond correctement à la 2<sup>ème</sup> question)

Or,  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$  lorsque les événements A et B sont indépendants.

Puisque le sujet répond tout à fait au hasard, la réponse qu'il donne à une question n'influence en aucune manière la réponse qu'il donne à l'autre question.

= P (le sujet répond correctement à la 1<sup>ère</sup> question) × P (le sujet répond correctement à la 2<sup>ème</sup> question)

$$= (0,2).(0,2) = (0,2)^2 = 0,04.$$

4. Si l'on pose deux questions successivement, quelle est la probabilité pour qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard réponde incorrectement aux deux questions ?

Réponse :

$$0,8^2=0,640$$

5. Si l'on pose deux questions successivement, quelle est la probabilité pour qu'un sujet ignorant tout et répondant au hasard commette une et une seule erreur ?

Réponse :

$$2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,320$$

Raisonnement :

P (le sujet commet une et une seule erreur)

= P ( {le sujet répond correctement à la 1<sup>ère</sup> question | le sujet répond incorrectement à la 2<sup>ème</sup> question}  $\cup$  (ou) {le sujet répond incorrectement à la 1<sup>ère</sup> question | le sujet répond correctement à la 2<sup>ème</sup> question} )

Or,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  lorsque les événements A et B sont incompatibles.

= P (le sujet répond correctement à la 1<sup>ère</sup> question | le sujet répond incorrectement à la 2<sup>ème</sup> question) + P (le sujet répond incorrectement à la 1<sup>ère</sup> question | le sujet répond correctement à la 2<sup>ème</sup> question)

= P (le sujet répond correctement à la 1<sup>ère</sup> question).P (le sujet répond incorrectement à la 2<sup>ème</sup> question) + P (le sujet répond incorrectement à la 1<sup>ère</sup> question).P (le sujet répond correctement à la 2<sup>ème</sup> question)

$$= (0,2)(0,8) + (0,8)(0,2) = 2 \cdot (0,2)(0,8) = 0,320.$$

6. Si X est la variable comptant le nombre de réponses fausses données par un sujet (ignorant tout et répondant au hasard) lorsque l'on pose 2 questions successivement :

Quelles sont les valeurs que peut prendre cette variable ?	0, 1, 2
Quelle loi de probabilité suit cette variable (précisez les paramètres)	B(2 ; 1/2) Les 2 questions sont posées de manière indépendante l'une de l'autre et la probabilité de succès (donner une réponse fausse) à chaque question vaut 1/2

7. Retranscrivez les résultats précédents (correspondant à des séquences d'une question ou de 2 questions successives) dans le tableau ci-dessous. Complétez ce dernier en calculant les probabilités d'obtenir un nombre donné de réponses fausses pour des séquences de respectivement 3, 4 et 5 questions successives.

Nombre de questions	1	2	3	4	5
Probabilité de n'observer aucune faute	<b>0,200</b>	<b>0,040</b>	<b>0,008</b>	<b>0,002</b>	<b>0,000</b>
Probabilité d'observer une et une seule faute	<b>0,800</b>	<b>0,320</b>	<b>0,096</b>	<b>0,026</b>	<b>0,006</b>
Probabilité d'observer exactement 2 fautes		<b>0,640</b>	<b>0,384</b>	<b>0,154</b>	<b>0,051</b>
Probabilité d'observer exactement 3 fautes			<b>0,512</b>	<b>0,410</b>	<b>0,205</b>
Probabilité d'observer exactement 4 fautes				<b>0,410</b>	<b>0,410</b>
Probabilité d'observer exactement 5 fautes					<b>0,328</b>
Totaux	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>

Raisonnement :

Supposons que le test soit constitué de  $n$  questions ( $N = 1, 2, 3, 4$  ou  $5$ ). La variable  $X$  comptant le nombre de réponses fausses données par un sujet ignorant tout et répondant au hasard suit une loi  $B(N; 0,8)$ .

Pour décider de la réussite ou non au test, on décide d'adopter la règle suivante :

Dès que la probabilité d'obtenir par pur hasard le nombre observé de fautes est inférieure au seuil de 0,05, le test séquentiel est arrêté et le sujet est déclaré avoir réussi.

8. Au bout de combien  $n$  de questions un sujet ne commettant aucune faute a-t-il réussi ?

Réponse :

Au bout de deux questions. En effet, 0,040 est la première valeur inférieure au seuil.

9. Au bout de combien de questions un sujet commettant une et une seule erreur d'inattention a-t-il réussi ?

Réponse :

Au bout de 4 questions (0,026 est la première valeur inférieure au seuil).

10. Au bout de combien de questions un sujet commettant deux fautes a-t-il réussi ?

Réponse :

Jamais (toutes les probabilités sont supérieures au seuil).

11. A partir de combien d'erreurs n'est-il plus nécessaire de continuer le processus (en supposant qu'on ne dispose que de 5 questions au maximum) ?

Réponse :

Au bout de deux erreurs (à partir de deux erreurs, toutes les probabilités calculées sont supérieures au seuil).

## T.P. 7 – Exercice supplémentaire 2

### Répartition hebdomadaire d'activités

#### Principe multiplicatif – combinaison – permutation (Corrigé)

Un étudiant se propose d'établir un programme hebdomadaire en fixant ses activités pour chacune des 7 soirées de la semaine. Le but de l'exercice est de dénombrer ces programmes sous différentes contraintes.

1. De combien de manières différentes peut-il répartir trois soirées d'étude sur la semaine ?

Réponse :

Nombre de sous-ensembles de taille 3 que l'on peut extraire dans l'ensemble de 7 jours de la semaine. Donc : c'est une combinaison, sans répétition avec ordre non pertinent.

Nous avons donc  $r = 3$  et  $N = 7$

$$C_N^r = C_7^3 = \frac{N!}{(N-r)!r!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{(4*3*2*1)*(3*2*1)} = \frac{7*6*5}{3*2*1} = 35$$

2. Sachant que l'étudiant choisit de déterminer aléatoirement la répartition de ses trois jours d'étude quelle est la probabilité qu'il étudie lundi, mardi et mercredi.

Réponse :

Au point 1, nous avons déterminé le nombre de sous-ensembles de taille 3 que l'on peut extraire dans l'ensemble de 7 jours de la semaine et nous avons donc pour  $r = 3$  et  $N = 7$  :

$$C_N^r = C_7^3 = \frac{N!}{(N-r)!r!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{(4*3*2*1)*(3*2*1)} = \frac{7*6*5}{3*2*1} = 35 \text{ et } \frac{1}{35} = .029$$

Il y avait donc 35 combinaisons possibles, ce qui nous donne une chance sur 35 de tomber sur la combinaison « lundi-mardi-mercredi ».

3. Sachant que l'étudiant choisit de déterminer aléatoirement la répartition de ses trois jours d'étude, sans tenir compte de ses autres activités, quelle est la probabilité qu'il étudie lundi, mardi et mercredi ou lundi, mardi et jeudi. ?

Réponse :

$$\frac{1}{35} + \frac{1}{35} = \frac{2}{35} = .057$$

## T.P. 7 – Exercice supplémentaire 3 (Corrigé)

On considère un jeu normal de 52 cartes comme une POPULATION dans laquelle on va effectuer un ÉCHANTILLONNAGE.

TIRAGE ALEATOIRE SIMPLE AVEC REPLACEMENT

On prélève un échantillon aléatoire simple de 3 cartes.

1. Calculez le nombre d'échantillons différents que l'on peut ainsi obtenir.

Réponse :

$$52^3 = 140608$$

2. Complétez le tableau suivant

Echantillon comportant...	Nombre		Probabilité
	en formule	résultat numérique	
...3 cœurs	$13^3$	2197	0.016
...2 cœurs	$13^2 \times 39 \times 3$	19773	0.141
...1 cœur	$13 \times 39^2 \times 3$	59319	0.422
...0 cœur	$39^3$	59319	0.422
Totaux		140608	1

3. La distribution de probabilité calculée dans la dernière colonne du tableau précédent pour la variable “nombre de cœurs contenus dans l'échantillon de 3 cartes” peut être obtenue plus directement en utilisant une distribution théorique connue. Donnez le nom de cette distribution et calculez suivant celle-ci la probabilité d'obtenir deux cœurs dans l'échantillon.

Réponse :

(i) Distribution binomiale  $B(n, p)$  où  $N = 3$  et  $p = \frac{1}{4}$

(ii)  $P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = 0,141$

## T.P. 7 – Exercice supplémentaire 4 (Corrigé)

1. On lance un dé 4 fois. On considère que le succès consiste à obtenir le chiffre 6. L'échec est donc d'obtenir tout événement différent de 6.

- 1.1. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 succès ? C'est-à-dire quelle est la probabilité que sur les 4 lancers, le dé ne tombe jamais sur le chiffre 6 ? Réalisez le calcul de deux façons différentes. D'une part en utilisant la formule adéquate et la table des coefficients binomiaux, d'autre part en utilisant la table de la distribution binomiale.
- 1.2. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 succès ?
- 1.3. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 succès ?
- 1.4. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 succès ?
- 1.5. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 succès ?

Réponse :

$$p = \text{obtenir un } 6 = P(6) = 1/6 \text{ (succès)}$$

$$q = \text{ne pas obtenir un } 6 = P(\sim 6) = 1-p = 5/6 \text{ (échec)}$$

$$N = 4 \text{ (4 lancers)}$$

a) En utilisant la formule et la table des coefficients binomiaux :

$$P(\text{ne pas obtenir de } 6) = C_N^r p^r q^{N-r} = C_4^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0} = 1 * 1 * \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx .4823$$

$$P(\text{obtenir un } 6) = C_N^r p^r q^{N-r} = C_4^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = 4 * \frac{1}{6} * \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324} \approx .3846$$

$$P(\text{obtenir deux } 6) = C_N^r p^r q^{N-r} = C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = 6 * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216} \approx .1157$$

$$P(\text{obtenir trois } 6) = C_N^r p^r q^{N-r} = C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-3} = 4 * \left(\frac{1}{6}\right)^3 * \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{324} \approx .0154$$

$$P(\text{obtenir quatre } 6) = C_N^r p^r q^{N-r} = C_4^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-4} = 1 * \left(\frac{1}{6}\right)^4 * \left(\frac{5}{6}\right)^0 \approx 7,7160 * 10^{-4}$$

b) En utilisant la table de la distribution binomiale, pour  $N = 4$  et  $p=1/6$  et  $q = 5/6$ , nous trouvons les probabilités cumulées suivantes :

Pour 0 fois 6, nous avons .4823  $P(\text{ne pas obtenir } 6) = .4823$

Pour 1 fois 6, nous avons .8681 et donc  $P(\text{obtenir un } 6) = .8621 - .4823 = .3798$

Pour 2 fois 6, nous avons .9838 et donc  $P(\text{obtenir deux } 6) = .9838 - .8681 = .1157$

Pour 3 fois 6, nous avons .9992 et donc  $P(\text{obtenir trois } 6) = .9992 - .9838 = .0154$

Et pour 4 fois 6, nous avons 1.0000 et donc  $P(\text{obtenir quatre } 6) = 1 - .9992 = 8 * 10^{-4}$

Ce qui donne bien les probabilités non cumulées obtenues ci-dessus quelques erreurs d'arrondis près.

2. Calculez la moyenne, la variance et l'écart type de cette distribution de probabilités.

Réponse :

Il s'agit d'une distribution binomiale et nous avons donc :

$$m = Np = 4 \frac{1}{6} = .67$$

$$s^2 = Npq = .56 \quad \text{et} \quad s = .75$$

## T.P. 7 - Exercice supplémentaire 6 (Corrigé)

Un participant à un jeu de hasard basé sur le lancer d'un dé a l'impression que ce dernier tombe peu souvent sur le 6 et que le dé est pipé.

Pour lever le doute, il enregistre les résultats obtenus lors des jets successifs.

1. En supposant le dé non pipé, comment se nomme la DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ DE LA VARIABLE ALÉATOIRE « nombre de 6 observés après 10 jets » ? Précisez en justifiant le type de distribution et ses paramètres).

Réponse :

Distribution binomiale  $B(10; 1/6)$ . En effet, les jets peuvent être supposés indépendants les uns des autres. La probabilité de succès d'un jet = Probabilité que le 6 sorte =  $1/6$ . Nous sommes bien dans un schéma de Bernoulli (une expérience aléatoire avec une probabilité  $1/6$  de succès) répétée 10 fois de manière indépendante les unes des autres.

2. Déterminez les probabilités associées à chaque valeur possible que peut prendre la variable aléatoire.

Valeurs possibles	Probabilités
0	<b>0.162</b>
1	<b>0.323</b>
2	<b>0.291</b>
3	<b>0.155</b>
4	<b>0.054</b>
5	<b>0.013</b>
6	<b>0.002</b>
7	<b>0.000</b>
8	<b>0.000</b>
9	<b>0.000</b>
10	<b>0.000</b>

3. Le joueur n'ayant observé aucun 6 après 10 jets, conclut que le dé est pipé et que la fréquence d'apparition du résultat 6 est anormalement basse.

Que pensez-vous de la conclusion du joueur ? Peut-on évaluer la probabilité que cette conclusion soit fautive (c'est à dire que le dé soit bien équilibré, malgré les résultats observés) ?

Réponse :

La réponse du joueur est hâtive. En effet, pour un dé équilibré, il y a une probabilité de 0.162 de n'observer aucun 6 au cours de 10 lancers successifs. Il y a donc une probabilité de 0.162 pour que la conclusion du joueur soit fautive.

4. Comment peut-on calculer facilement la probabilité de l'événement « 6 n'apparaît pas lors de n jets successifs » en supposant que le dé est équilibré ? (Donnez la formule et vérifiez la cohérence de votre résultat avec la distribution calculée en 2).

Réponse :

P(les résultats aux n jets successifs sont tous différents de 6)  
= P((le résultat du 1<sup>er</sup> jet est différent de 6) et (le résultat du 2<sup>ème</sup> jet est différent de 6) et ....(le résultat du N<sup>ème</sup> jet est différent de 6))  
= P(le résultat du 1<sup>er</sup> jet est différent de 6) . P(le résultat du 2<sup>ème</sup> jet est différent de 6) .  
..... P(le résultat du N<sup>ème</sup> jet est différent de 6) puisque les résultats obtenus aux différents jets successifs sont indépendants les uns des autres.

$$= \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right) \dots \left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^N$$

La probabilité d'obtenir N résultats différents de 6 est donc égale à  $\left(\frac{5}{6}\right)^N$

Pour N = 10, on trouve  $\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,833^{10} = 0,162$  Ce résultat est bien conforme à la probabilité donnée en 2 pour la valeur 0.

5. À partir de combien de jets successifs de dé ne présentant pas de 6 peut-on conclure que le dé est pipé avec une probabilité de se tromper inférieure à 0,05

Réponse :

Par tâtonnements successifs, on trouve que  $0,833^{16} = 0,054$  et  $0,833^{17} = 0,045$   
En d'autres termes, lorsque le dé est bien équilibré, on a un peu plus de 5 chances sur 100 de n'obtenir aucun 6 au cours de 16 jets successifs ; par contre si le dé est bien équilibré et qu'on le jette 17 fois successivement, on a moins de 5 chances sur 100 de n'obtenir aucun 6. On peut donc estimer qu'il est très peu probable de n'obtenir aucun 6 avec un certain dé bien équilibré lancé 17 fois successivement. Dès lors si l'on n'obtient aucun 6 avec un certain dé au cours de 17 jets successifs, on a de fortes raisons de penser que ce dé n'est pas bien équilibré. Il faut donc obtenir 17 jets successifs ne comprenant pas le 6 pour pouvoir affirmer que le dé est pipé avec une probabilité d'erreur de moins de 0,05.